Rogosinski, W.

Über positive harmonische Entwicklungen und typischreelle Potenzreihen. (German)

JFM 58.0305.01
M. Z. 35, 93-121 (1932).

In dieser, an interessanten Einzelbemerkungen ungewöhnlich reichhaltigen Arbeit wird in der Hauptsache die Klasse $\mathfrak{J}$ der in $|z|<1$ konvergenten Potenzreihen

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \quad \text{mit reellen} \quad a_n \tag{1}$$

behandelt, die in $|z|<1$ nur für die reellen z reellwertig sind und als in $|z|<1$ typischreell bezeichnet werden.

Ist $\mathfrak{R}'$ die Klasse der in $|z|<1$ konvergenten Potenzreihen

$$\varphi(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nz^n \quad \text{mit reellen} \quad \alpha_n\,. \tag{2}$$

die in $|z|<1$ einen positiven Realteil haben (eine Unterklasse der besonders von *Carathéodory* (1911; F. d. M. 42, 429 (JFM 42.0429.*)) untersuchten Klasse $\mathfrak{R}$ aller in $|z|<1$ konvergenten Potenzreihen $1+\sum A_nz^n$ mit positivem Realteil), so entspricht vermöge

$$\varphi(z)=f(z)\frac{1-z^2}{z} \tag{3}$$

jedem $f(z)$ aus $\mathfrak{J}$ ein $\varphi(z)$ aus $\mathfrak{R}'$ und umgekehrt.

Im ersten Abschnitt werden nun die wichtigsten Tatsachen zusammengestellt, die über die Klasse $\mathfrak{R}$ bekannt sind, viele neue hinzugefügt und entsprechende Feststellungen über die Klasse $\mathfrak{R}'$ gemacht.

Im zweiten Abschnitt wird dann, teils auf Grund des Zusammenhanges (3), teils durch direkte Betrachtungen, eine Fülle von Einzelergebnissen über die Reihen $f(z)$ aus $\mathfrak{J}$, über ihre Abschnitte bzw. über die in $0\le r<1$, $0<\varphi<\pi$ positiven harmonischen Sinusentwicklungen

$$\nu(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\sin n\varphi \quad (a_1=1) \tag{4}$$

gewonnen. Es seien die folgenden hervorgehoben:

1) Für $n\ge 2$ heiße der Punkt $P_n=(a_2,a_3,\dots .a_n)$ des $(n-1)$-dimensionalen Raumes der n-te Repräsentant von $f(z)$. P_n liegt in der abgeschlossenen konvexen Hülle K_n der Kurve

$$\frac{\sin 2\vartheta}{\sin\vartheta}.\frac{\sin 3\vartheta}{\sin\vartheta}.\dots.\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} \quad (0\le\vartheta\le\pi).$$

2) Die Potenzreihe (1) gehört genau dann zu $\mathfrak{J}$, wenn für jedes $n\ge 2$ der n-te Repräsentant in K_n liegt.

3) Durch

$$f_u(z)=f(z^2)\frac{1+z^2}{z}$$

wird jeder Funktion $f(z)$ aus $\mathfrak{J}$ eine ungerade Funktion $f_u(z)$ aus $\mathfrak{J}$ zugeordnet und umgekehrt.

4) Ist $\mathfrak{L}(r)$ die Länge des Bildes von $|z|=r<1$ durch ein $f(z)$ aus $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{L}^*(r)$ die Länge desjenigen durch $\frac{z}{(1\pm z)^2}$, so gilt stets $\mathfrak{L}(r)\le\mathfrak{L}^*(r)$.

5) Bei gegebenen beliebigen komplexen λ_n sei

$$\mathfrak{L}(\vartheta) = \sum_2^\infty \lambda_n \frac{\sin n\vartheta}{\sin \vartheta}$$

für alle ϑ gleichmäßig konvergent. Dann ist $\mathfrak{L} = \sum \lambda_n a_n$ für die Koeffizienten a_n eines jeden $f(z)$ aus $\mathfrak{J}$ konvergent, und $\mathfrak{L}$ liegt in der abgeschlossenen konvexen Hülle der Kurve $\mathfrak{L}(\vartheta)$. Jeder solche $\mathfrak{L}$-Wert wird für ein geeignetes $f(z)$ auch wirklich angenommen. - Durch Spezialisierung der λ_n ergibt sich hieraus weiter eine Fülle interessanter Einzelheiten, z. B.

$$1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1} \ge 0, \quad 1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2} \ge 0\,.$$
$$n + (n-1)a_2 + \cdots + a_n \ge 0, \quad 1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \ge 0\,\text{.u.s.w.}$$

6) Es ist $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) \ge \frac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f_u(x) \ge \frac{1}{2}$.

7) Die Abschnitte eines in $|z| < 1$ typisch-reellen $f(z)$ sind in $|z| \le \frac{1}{4}$ typisch reell. Dabei ist $\frac{1}{4}$ die beste Konstante.

8) Für die unterklasse $\mathfrak{J}_s$ der schlichten Funktionen aus $\mathfrak{J}$ lassen sich noch genauere Aussagen machen.

Reviewer: Knopp, K., Prof. (Tübingen)

Full Text: DOI EuDML Link