Stone, Marshall Harvey

Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. (English)

JFM 58.0420.02
American Mathematical Society Colloquium Publications. Vol. 15. New York: American Mathematical Society (AMS). viii, 622 p. (1932).

Die Theorie der linearen Transformationen im Hilbertschen Raume, die von Hilbert begründet und später von F. Riesz fortgesetzt wurde, ist vor einigen Jahren durch fruchtbare Untersuchungen über nichbeschränkte Transformationen stark gefördert worden. Die wichtigsten Resultate dieser neuen Forschungsrichtung sind zuerst von J. von Neumann und M. Stone veröffentlicht worden. Die alte Theorie ist auf diese Weise nicht nur ergänzt worden, sondern hat in gewisser Hinsicht auch eine abschließende Erweiterung erfahren. Das vorliegende Buch ist das erste, das seit dem im Jahre 1912 erschienenen von *F. Riesz* [Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Paris: Gauthier-Villars (1912; JFM 44.0401.01)] diese Theorie tiefgehend behandelt. Es entstand aus dem doppeltem Verlangen des Verf., seine eigenen Beiträge zu veröffentlichen und auch dem Forscher auf diesem Gebiet und dem Mathematiker im allgemeinen ein englisches Handbuch zur Verfügung zu stellen.

Die Darstellung ist durchaus aufs sorgfältigste ausgearbeitet. Verf. hat die Theorie vom Anfang an lückenlos aufgebaut; der Leser wird nie vor die Notwendigkeit gestellt, aus anderen Quellen einen Beweis zu vervollständigen. Die Behauptungen sind durchweg scharf ausgedrückt, die Beweise sind klar und verhältnismäßig gedrängt, der Plan ist übersichtlich. Um einen besseren Überblick über das Ganze zu geben, werden wir hier den Inhalt der einzelnen Kapitel kurz wiedergeben.

Kap. I ist dem Studium der elementaren Eigenschaften des Hilbertschen Raumes gewidmet. Verf. fängt mit einer axiomatischen Begründung an und leitet von da aus die wohlbekannten Sätze über Koordinatensysteme und lineare Mannigfaltigkeiten ab. Die zwei gewöhnlichen Verwirklichungen des abstrakten Raumes, die eine als Koordinatenraum, dessen Punkte $(x_1, x_2, \dots)$ die Ungleichgeit $\sum |x_\alpha|^2 < \infty$ befriedigen, die andere als Funktionenraum, dessen Punkte quadratintegrierbare Funktionen sind, werden später eingeführt.

Kap. II beschäftigt sich mit dem Begriff einer linearen Transformation des Raumes in sich selbst. Die in der weiteren Entwicklung besonders wichtigen Transformationen, die symmetrischen, selbstadjungierten, isometrischen und unitären Transformationen werden an dieser Stelle definiert und ihre unmittelbaren Eigenschaften untersucht. In Kap. III findet der Leser Beispiele von linearen Transformationen, unter anderen unendliche Matrizen, Integral- und Differentialoperatoren. Kapitel IV behandelt das Spektrum und die Resolvente einer Transformation. Auf diesen Seiten entwickelt der Verf. die Grundeigenschaften, die für die folgende Darstellung nötig sind.

Im nächsten Kapitel (V) finden wir den Hauptsatz für selbstadjungierte Transformationen (kurz "sa. Tr."): Sei H eine sa.Tr., dann ist es möglich, eine Integraldarstellung für H zu erhalten, nämlich:

$$(Hf, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(E(\lambda)f, g).$$

Hier ist $E(\lambda), -\infty < \lambda < \infty$, eine sogenannte Zerlegung der Einheit, die Funktionen $(E(\lambda)f, g)$ sind von beschränkter Schwankung. Weiter ist Hf sinnvoll, wenn und nur wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d\|E(\lambda)f\|^2 < \infty$$

ist. In Kapitel VI wird die Spektralzerlegung einer sa. Tr. auf das Problem der Definition ihrer "Funktionen" angewendet. Genauer ausgedrückt entwickelt Verf. den Isomorphismus zwischen einer Klasse von Transformationen auf der einen Seite und einer Klasse von Funktionen einer komplexen Veränderlichen (die die Baireschen Funktionen enthält) auf der anderen. Seien F, G unter diesem Isomorphismus den Funktionen $f(\lambda)$ bzw. $f(\lambda)$ zugeornet, dann sind $F+G, F \cdot G$ den Funktionen $f(\lambda)+g(\lambda)$ bzw. $f(\lambda) \cdot g(\lambda)$ zugeordnet. Die weiteren Eigenschaften dieses vielseitigen Isomorophismus, die entwickelt werden, müssen wir hier übergehen.

In Kapitel VII untersucht der Verf. Unitäräquivalenz zweier sa. Tr. H_1 und H_2: die Frage, ob für gegebene H_1 und H_2 eine unitäre Transformation U vorhanden ist, so daß

$$H_2 = UH_1U^{-1}$$

ist, wird hier vollständig beantwortet. In Kap. VIII wird die Spektraltheorie der unitären und normalen Transformationen entwickelt. Im folgenden Kapitel (IX) findet der Leser eine Einleitung in die Theorie der symmetrischen Tr. (alle sa. Tr. sind symmetrisch, aber nich umgekehrt). Die Charakterisierung solcher Tr. wurde zum erstenmal von *J. v.Neumann* durchgeführt. Verf. gibt auch eine Übersicht über die Resultate, die von *T. Carleman* stammen [Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. Uppsala: Universitets Årsskrift (1923; JFM 49.0272.01)].

Das letzte Kapitel (X) beschäftigt sich mit den Anwendungen dieser Theorie, die mit Ausnahme des dritten Kapitels bisher rein abstrakt behandelt ist. Diese Anwendungen sind dreierlei Arten: Integraloperatoren, Differentialoperatoren, und unendliche Matrizen, insbesondere Jacobische Matrizen. Hier wird der kundige Leser eine durchgreifende Analyse einer Reihe interessanter Probleme finden.

Weitere Besprechungen: G. Bouligand, Revue scientifique 71 (1933), 255; A. Buhl, Enseignement 33 (1935), 233-235.

Reviewer: Lorch, E., Dr. (New York)

MSC:

47-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to operator theory

46-02 Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to functional analysis

Keywords:

self-adjoint operators