Bohnenblust, H. F.; Hille, E.
On the absolute convergence of Dirichlet series. (English) JFM 57.0266.05
Annals of Math. (2) 32, 600-622 (1931).

Es werden die von *Bohr* und *Toeplitz* (1913; F. d. M. 44; 306, 405) gewonnenen Resultate über die absolute Konvergenz von *Dirichlet*schen Reihen in folgender interessanter Weise ergänzt und verallgemeinert: Es sei σ_α die absolute, σ_u die gleichmäßige Konvergenzabszisse der *Dirichlet*schen Reihe

$$\sum \frac{a_n}{n^s}. \tag{1}$$

Bohr hat bewiesen, daß $\sigma_\alpha \leqq \sigma_u + \frac{1}{2}$ ist; *Toeplitz* hat gezeigt, daß jedenfalls zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Reihe (1) existiert, für die $\sigma_\alpha > \sigma_u + \frac{1}{4} - \varepsilon$, wobei die Koeffizienten überdies der besonderen Bedingung genügen, daß $a_n = 0$, falls n mehr als zwei (gleiche oder verschiedene) Primfaktoren enthält.

Die Verf. beweisen nun, daß der Fall $\sigma_\alpha = \sigma_u + \frac{1}{2}$ tatsächlich eintreten kann, womit die von *Bohr* und *Toeplitz* offen gelassene Frage erledigt ist. Für die absolute Konvergenzabszisse σ_α^* der *Dirichlet*schen Reihe $\sum \frac{b_n}{n^s}$, die aus (1) entsteht, wenn man $b_n = a_n$, falls n nicht mehr als m Primfaktoren enthält, und sonst $b_n = 0$ setzt, zeigen die Verf., daß $\sigma_\alpha^* \leqq \sigma_u + \frac{m-1}{2m}$ ist. Auch hier kann der Fall $\sigma_\alpha^* = \sigma_u + \frac{m-1}{2m}$ eintreten, wie durch ein Beispiel gezeigt wird.

Bei den Beweisen finden die von *Bohr* und *Toeplitz* geschaffenen Methoden Anwendung; ein wichtiges Hilfsmittel ist die in § 1 - § 3 angestellte Untersuchung über m-lineare Formen, wobei die *Littlewood*schen Theoreme über die Beschränktheit von bilinearen Formen (1930; JFM 56.0335.*-336) wie folgt verallgemeinert werden:

(I) Wenn eine m-lineare Form

$$\sum_{i_1 \cdots i_m = 1}^{\infty} a_{i_1 \cdots i_m} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_m}^{(m)}$$

im Gebiete $|x_n^{(\nu)}| < 1$ beschränkt ist, d. h. wenn die Abschnitte

$$\sum_{i_1=1}^{N_1} \sum_{i_2=1}^{N_2} \cdots \sum_{i_m=1}^{N_m} a_{i_1 i_2 \cdots i_m} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_m}^{(m)}$$

für $|x_n^{(\nu)}| < 1$ absolut genommen kleiner als ein gewisses H sind, so sind

$$S = \left[\sum_{i_1 \cdots i_m = 1}^{\infty} |a_{i_1 \cdots i_m}|^{\varrho} \right]^{\frac{1}{\varrho}}$$

und $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(m)}$ – es ist

$$\varrho = \frac{2m}{m+1}, T^{(\nu)} = \sum_{i_\nu = 1}^{\infty} T_{i_\nu}^{(\nu)} \quad \text{und} \quad T_{i_\nu}^{(\nu)} = \left[\sum |a_{i_1 \cdots i_m}|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

wo die Indices $i_1, i_2, \dots, i_{\nu-1}, i_{\nu+1}, \dots, i_m$ von 1 bis ∞ zu summieren sind – kleiner als AH, wo A eine nur von m abhängige Konstante ist.

(II) Sind $t_{i_\nu}^{(\nu)}$ und $s_{i_1 \cdots i_m}$ derart vorgelegt, daß

$$\lim_{i_\nu \to \infty} t_{i_\nu}^{(\nu)} = \lim_{i_1 \cdots i_m \to \infty} s_{i_1 \cdots i_m} = \infty,$$

so gibt es beschränkte Formen, für die $\sum t_{i_\nu}^{(\nu)} T_{i_\nu}^{(\nu)}$ und

$$\sum s_{i_1} \dots s_{i_m} |a_{i_1} \dots a_{i_m}|^{\frac{2m}{m+1}}$$

divergieren.

In einem Schlußparagraphen werden die von *Bohr* (1918; F. d. M. 46, 490 (JFM 46.0490.*)) untersuchten speziellen Typen von allgemeinen *Dirichlet*schen Reihen $\sum a_n e^{-\lambda_n s}$ betrachtet.

Reviewer: Belinfante, M. J., Dr. (Amsterdam)

Full Text: DOI