Cartan, H.

Les fonctions de deux variables complexes et le problème de la représentation analytique.

(French) JFM 57.0387.01
Journ. de Math. (9) 10, 1-114 (1931).

Da sich zwei Bereiche $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ im Raume der beiden komplexen Veränderlichen w und z im allgemeinen nicht durch ein Paar analytischer Funktionen eineindeutig aufeinander abbilden lassen, selbst wenn beide Bereiche als beschränkt, schlicht und einfach zusammenhängend vorausgesetzt werden, stellt die Abbildungstheorie hier insbesondere die Aufgaben, einerseits möglichst allgemeine Regeln anzugeben, nach denen man entscheiden kann, wann zwei Bereiche aufeinander abgebildet werden können, und andrerseits ein System von "Repräsentantenbereichen" anzugeben, so daß sich jeder Bereich auf einen von diesen abbilden läßt. (Abbildung sei im folgenden stets im Sinne von eineindeutiger analytischer Abbildung gemeint.) Diese Probleme werden in der vorliegenden Arbeit weitgehend gelöst für eine spezielle Klasse von Bereichen, nämlich alle die, die eine unendliche Gruppe von Selbstabbildungen gestatten, bei denen ein bestimmter innerer Punkt – man kann allgemein annehmen, daß das der Nullpunkt O sei – fest bleibt. Die Bereiche werden im allgemeinen als beschränkt, jedoch nicht als schlicht vorausgesetzt, wogegen aber meistens angenommen wird, daß der Fixpunkt der Transformationsgruppe kem Verzweigungspunkt ist. Bezüglich der Art der Verzweigungspunkte werden gewisse Einschränkungen gemacht.

Verf. betrachtet dann zunächst die Bereiche, die eine Automorphismengruppe der Form

$$w' = we^{im\vartheta}, \quad z' = ze^{ip\vartheta}$$

(m, p teilerfremde ganze Zahlen $\neq 0, 0$; ϑ beliebig reell) gestatten. Diese werden als (m, p)-Bereiche (domaines (m, p) cerclés) bezeichnet. Der Nullpunkt soll stets innerer Punkt und im Falle $mp > 0$ kein Verzweigungspunkt sein.

Ist $m = p (= 1)$, so erhält man die Kreiskörper (domaines cerclés), die schon früher von *Carathéodory* (1928; F. d. M. 54, 372 (JFM 54.0372.*)) in der speziellen Form der sternartigen Kreiskörper (d. h. mit jedem Punkt (w_0, z_0) ist auch (kw_0, kz_0), k beliebig komplex und $|k| \leqq 1$, innerer Punkt des Bereichs) eingeführt worden sind.

Falls $m = 0$ ist, geht die Gruppe über in

$$w' = w, \ z' = ze^{i\vartheta},$$

und man erhält die schon von *Hartogs* (1906, F. d. M. 37, 444 (JFM 37.0444.*)) betrachteten "Hartogsschen" Körper (domaines semi-cerclés). (*Hartogs* betrachtet nur den Spezialfall, daß die Körper "vollkommen" sind, d. h. mit (w_0, z_0) ist auch (w_0, kz_0), $|k| \leqq 1$, Punkt des Bereichs.)

Von besonderem Interesse ist dann noch eine Unterklasse der Kreiskörper, die *Reinhardt*schen Körper (*Reinhardt*, 1921; F. d. M. 48, 408 (JFM 48.0408.*)), die die zweiparametrige Gruppe

$$w' = we^{i\vartheta} \ z' = ze^{i\varphi},$$

zulassen. Ein solcher Körper heißt vollkommen, wenn mit (w_0, z_0) auch (hw_0, kz_0) für alle $|h| \leqq 1$, $|k| \leqq 1$ im Bereich liegt.

Über die (m, p)-Bereiche beweist Verf. folgenden grundlegenden Satz: Jede in in einem (m, p)-Bereich $\mathfrak{B}$ reguläre und eindeutige Funktion läßt sich in gewisser Weise in eine in ganz $\mathfrak{B}$ konvergente, in jedem abgeschlossenen Teilbereich gleichmäßig konvergente Reihe von in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen entwickeln. Es gilt:

Im Falle $mp > 0$ ist

$$f(w, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(w, z),$$

wobei die φ_n homogene Polynome n-ten Grades in $w^{\frac{1}{m}}$, $z^{\frac{1}{p}}$ sind; es ist

$$\varphi_n(w,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} f(we^{im\vartheta}, ze^{ip\vartheta})d\vartheta.$$

Bei Kreiskörpern erhält man speziell eine Reihe von gewöhnlichen homogenen Polynomen in w und z und bei den *Reinhardt*schen Körpern eine gewöhnliche Potenzreihe in w und z.

Der Fall der *Hartogs*schen Körper ($mp = 0$) liefert

$$f(w,z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n(w),$$

wo die f_n im Bereiche reguläre Funktionen von w allein sind.

Im Falle $mp < 0$ (es sei $m > 0$, $p' = -p$) erhält man:

$$f(w,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(w,z).$$

Dabei sind die φ von der Form

$$\varphi_n = (w^\lambda z^\mu)^n f_n(w^{p'} z^m),$$

wo λ und μ zwei ganze Zahlen mit $\lambda m + \mu p = 1$ und die f_n im Bereich analytische Funktionen von $u = w^{p'} z^m$ sind. Es gilt für die φ_n dieselbe Integraldarstellung wie im Falle $mp > 0$.

Über die mittelpunktstreuen Abbildungen dieser Bereiche untereinander und auf sich selbst lassen sich nun weitgehende Aussagen machen auf Grund des folgenden, sehr wichtigen Eindeutigkeitssatzes:

$\mathfrak{B}$ sei ein beliebiger, beschränkter, im Nullpunkt nicht verzweigter Bereich. $f(w,z)$ und $g(w,z)$ seien in $\mathfrak{B}$ regulär, und ihre Potenzreihenentwicklung in der Umgebung des Nullpunkts sei von der Form:

$$f(w,z) \equiv w' = w + \cdots,\ g(w,z) \equiv z' = z + \cdots.$$

Wenn dann w' und z' nur Koordinaten von Punkten aus $\mathfrak{B}$ durchlaufen, so gilt:

$$f(w,z) = w,\ g(w,z) = z.$$

Es ergibt sich so, daß alle nullpunktstreuen Abbildungen zweier (m,p)-Bereiche aufeinander (mit gleichem m und p), falls $mp > 0$ ist, ganz linear sind, abgesehen von dem Falle, wo eine der Zahlen m und p gleich 1 ist. (Ist z. B. $p = 1$, so ist

$$w' = aw + cz^m,\ z' = bz \qquad (ab \neq 0)$$

eine solche Transformation.) Für den Spezialfall der Kreiskörper vgl. auch *Behnke* (1930; JFM 56.0290.*).

Die nullpunktstreuen Abbildungen zweier (m,p)-Bereiche mit $mp < 0$ haben die Form:

$$w' = wf(w^{p'} z^m),\ z' = zg(w^{p'} z^m);$$

und die der *Hartogs*schen Körper:

$$w' = f(w),\ z' = zg(w).$$

Aus dem oben angegebenen Eindeutigkeitssatz folgt, daß die nullpunktstreuen Automorphismen eines beschränkten Bereichs $\mathfrak{B}$ bereits durch die Linearen Glieder der *Taylor*entwicklungen der Abbildungsfunktionen um den Nullpunkt eindeutig bestimmt sind; d. h. läßt $\mathfrak{B}$ eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von nullpunktstreuen Automorphismen zu, so ist $\mathfrak{G}$ isomorph zu einer Gruppe $\mathfrak{G}'$ homogener linearer Transformationen in w und z. Man kann annehmen, daß die Determinanten der Transformationen von $\mathfrak{G}'$ alle vom Betrag 1 sind. Es läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{G}$ stets eine geschlossene Gruppe ist. Also ist auch $\mathfrak{G}'$ geschlossen, woraus weiter folgt, daß $\mathfrak{G}'$ eine *Lie*sche Gruppe ist, falls $\mathfrak{G}'$ unendlich viele Transformationen enthält. Somit gibt es zu ihr eine invariante *Hermite*sche Form. Man denke sich die Variablen so transformiert, daß diese Form übergeht in $w\bar{w} + z\bar{z}$. Jeder Substitution aus $\mathfrak{G}'$ werden jetzt zwei Substitutionen zugeordnet, deren

Determinante gleich 1 ist, und die aus den gegebenen durch Transformationen der Form

$$w' = we^{i\vartheta},\ z' = ze^{i\vartheta} \text{ bzw. } w' = z - we^{i\vartheta},\ z' = -ze^{i\vartheta}$$

hervorgehen. Die Gruppe der so entstehenden Transformationen sei Γ. Offenbar enthält Γ mit einer Transformation S auch diejenige S', die aus S durch Multiplikation aller Koeffizienten mit -1 hervorgeht. Jedem Paar (S, S') wird dann eine lineargebrochene Transformation einer Variablen zugeordnet, und so entsteht eine Gruppe $\mathfrak{H}$, die isomorph ist zu einer Rotationsgruppe der Kugel um einen Durchmesser. Diese Gruppen lassen sich aber übersehen.

Der wichtigste Satz, der sich hieraus ergibt, ist: Jeder beschränkte Bereich $\mathfrak{B}$, der eine unendliche Automorphismengruppe mit einem Fixpunkt zuläßt, läßt sich auf einen (m, p)-Bereich abbilden.

Aus der Struktur der Gruppe läßt sich dann weiter entscheiden, welcher Art dieser (m, p)-Bereich ist. Ferner liefert eine nähere Untersuchung der oben angegebenen linearen Gruppen eine genaue Übersicht über alle möglichen mittelpunktstreuen Abbildungen sämtlicher (m, p)-Bereiche untereinander und auf sich selbst.

Im letzten Kapitel wird ein weiteres sehr wichtiges Problem behandelt: die Frage nach den Regularitätsbereichen (domaines maxima). Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß ein *Reinhardt*scher Kreiskörper oder *Hartogs*scher Körper Regularitätsbereich ist (d. h. daß es eine in ihm reguläre Funktion $f(w, z)$ gibt, die sich über keinen Randpunkt fortsetzen läßt). Ferner werden die allgemeinen Sätze bewiesen:

Ist $\mathfrak{B}$ beschränkt und schlicht und gestattet $\mathfrak{B}$ eine unendliche Gruppe von Automorphismen mit einem Fixpunkt, so gibt es einen kleinsten $\mathfrak{B}$ umfassenden schlichten Regularitätsbereich $\mathfrak{B}'$, derart daß alle in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen noch in $\mathfrak{B}'$ regulär sind. Und: Ein solcher Bereich $\mathfrak{B}$ ist dann und nur dann Regularitätsbereich, wenn es zu jedem Randpunkt (w_0, z_0) eine in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion gibt, die in (w_0, z_0) singulär wird.

Reviewer: Zumbusch, H., Dr. (Berlin)

Full Text: EuDML