Mahler, K.

Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlicher in speziellen Punktfolgen. (German) JFM 56.0185.03

Math. Ann. 103, 573-587 (1930).

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

sei eine Matrix mit nichtnegativen ganzen rationalen Elementen. Es sei

$$\Omega^k = \left(o_{\alpha\beta}^{(k)}\right) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

In $z = (z_1, \ldots, z_n)$ seien z_1, ..., z_n n komplexe Veränderliche;

$$z' = \Omega^k z$$

bezeichne die Transformation

$$z'_\alpha = \prod_{\beta=1}^{n} z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \qquad (\alpha = 1, 2, .., n).$$

Man habe ferner die Potenzreihe

$$E(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \cdots h_n} \cdot z_1^{h_1} \cdots z_n^{h_n}$$

und wähle die z_1, ..., z_n derart, daß die Werte $E(\Omega^k z)$ von $E(z)$ für genügend großes k konvergieren.

Verf. untersucht im Anschluß an eine eigene Arbeit [Math. Ann. 101, 342–366 (1929; JFM 55.0115.01)] folgendes Problem:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden der $E(\Omega^k z)$?

Verf. betrachtet den Fall

$$\begin{pmatrix} \varrho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varrho & \cdots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \cdots & \varrho \end{pmatrix} = \varrho E$$

mit ganzem $\varrho \geqq 2$. Er zeigt: Die Zahlen z_1, z_2, ..., z_n seien algebraisch, absolut kleiner als 1 und von Null verschieden. Es bestehe keine Gleichung

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \cdots z_n^{e_n} = 1$$

mit ganzen rationalen e_1, e_2, ..., e_n, die nicht alle gleichzeitig verschwinden. Dann folgt aus dem Verschwinden der Werte $E(\Omega^k z)$ mit großem k das identische Verschwinden von $E(z)$. Dem Beweis liegt der *Thue-Siegel*sche Satz zugrunde, aus dem Folgendes geschlossen wird: Die n algebraischen Zahlen z_1, z_2, ..., z_n seien vom Absolutbetrag Eins. $\varrho \geqq 2$ sei ganz. Existiert ein Polynom

$$F\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv 0$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten und eine positive Konstante α, sodaß für großes natürliches k die Ungleichung

$$F\big(z_1^{\varrho^k}, z_2^{\varrho^k}, \ldots, z_n^{\varrho^k}\big) = O\big(e^{-\alpha\varrho^k}\big)$$

bestellt, so gibt es n ganze rationale Zahlen e_1, e_2, ..., e_n, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so daß

$$z_1^{e_1} z_1^{e_2} \cdots z_n^{e_n} = 1$$

ist.

Es ergibt sich: Die Potenzreihe

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \cdots h_n} x_1^{h_1} \cdots x_n^{h_n}$$

konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes. Die n algebraischen Zahlen z_1, z_2, ..., z_n seien von Null verschieden und im Innern des Einheitskreises gelegen. Es gebe $m \leqq n$ algebraische Zahlen $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$, ..., $\mathfrak{z}_m$, zwischen denen keine Gleichung

$$\mathfrak{z}_1^{e_1} \mathfrak{z}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{z}_m^{e_m} = 1$$

besteht, wo die Exponenten ganze rationale Zahlen sind, die nicht gleichzeitig verschwinden; es sei

$$z_l = \mathfrak{z}_1^{q_{1l}} \cdots \mathfrak{z}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, \dots, n),$$

und die Matrix $(q_{\lambda l})$ $(\lambda = 1, ..., m;\ l = 1, ..., n)$ habe nur ganze rationale Elemente und den genauen Rang m. $\varrho \geqq 2$ sei eine feste ganze Zahl. Wenn dann

$$E^* (\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_m) \equiv E\, (x_1, \dots, x_n)$$

mit

$$x_l = \mathfrak{x}_1^{q_{1l}} \cdots \mathfrak{x}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, \dots, n)$$

als Funktion der Veränderlichen $\mathfrak{x}_1$, ..., $\mathfrak{x}_m$ nicht identisch verschwindet, so gibt es eine positive Konstante γ und eine Folge ins Unendliche wachsender natürlicher Zahlen k, sodaß

$$\left| \, E\big(z_1^{\varrho^k}, \dots, z_n^{\varrho^k}\big) \, \right| \geqq e^{-\gamma \varrho^k}$$

ist.

Hieraus folgt ähnlich wie in der oben angeführten Arbeit des Verf. ein Transszendenzsatz, der verschiedene Anwendungen zuläßt.

Reviewer: Müller, Klaus, Studienassessor (Finsterwalde)

MSC:

11J81 Transcendence (general theory)

Full Text: DOI EuDML