Nyström, E. J.

Über die praktische Auflösung von Integralgleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben. (German) JFM 56.0342.01

Acta Math. 54, 185-204 (1930).

Die Arbeit deckt sich inhaltlich im wesentlichen mit den beiden unter demselben Titel erschienenen in Commentationes Helsingfors 4 (1929), Nr. 15 (F. d. M. 55_{II}) und 5 (1930), Nr. 5 (F. d. M. 56_{I}, vorangehendes Referat). Neu hinzu kommt die Bemerkung, daß sich die Methode auch auf die belastete Integralgleichung sowie die erster Art anwenden läßt.

Näher eingegangen wird auf die nichtlineare Integralgleichung

$$\varphi(s) = \int_a^b K(s,t) F(t,\varphi(t))\,dt + f(s)$$

und die darauf zurückführbare Randwertaufgabe für

$$\varphi''(s) = F(s,\varphi(s)) + g(s), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Die Näherungsgleichungen werden ganz analog wie im linearen Fall gebildet. Auf die Konvergenzfrage geht Verf. nicht ein. Es muß jedoch darauf hingewiesen werden, daß das Verfahren nur dann gelingt, wenn eine und nur eine Lösung der Gleichung vorhanden ist, was im Allgemeinen jedoch nicht der Fall ist.

Als Beispiel wird die Gleichung der erzwungenen Schwingung

$$\varphi''(s) - \sin\varphi(s) + 1 = 0, \quad \varphi(\pm\tfrac{1}{2}) = 0$$

betrachtet. Die Werte von $\varphi(s)$ werden an den Stellen $s = 0$, $s = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, $s = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ (*Lobatto*sche Abszissen) errechnet. (IV 17.)

Reviewer: Hammerstein, A., Prof. (Kiel)

Full Text: DOI

References:

[1] vgl.v. Mises in Zeitschr. f. angew. Math. und Mech., Bd. 5 (1925), S. 159. 24-29643.Acta mathematica. 54. Imprimé le 18 mars 1930.

[2] Sowohl in der Terminologie wie in der Bezeichung schliessen wir uns dem vonHellinger undToeplitz geschriebenen Encyklopädieartikel an (Enc. math. Wiss. II C. 13, (1927).

[3] Die zu besprechende Methode ist früher vom Verfasser in den Aufsätzen behandelt worden: I.Über die praktische Auflösung von linearen Integraleichungen mit Anwendungen auf Randwertaufgaben der Potentialtheorie. (Soc. Scient. Fenn. Comm. Phys.-Math. IV. 15 (1928)), und II.Über die praktische Auflösung von Integralgleichungen. (Soc. Scient. Fenn. Comm. Phys.-Math. V. 5. (1929)). Diese Aufsätze, werden im Folgenden kurz mit I und II bezeichnet.

[4] Vgl.Goursat:Cours d'Analyse mathématique, vol. III, 3:te Aufl. Paris 1923, 368.

[5] Diese Zahlen wurden vonGauss selbst fürn=2,3, ... 7 auf 16 Dezimalstellen angegeben für das Intervall von o bis I. In den Ges. Werken III, S. 193, Göttingen 1866 findet sich ein Druckfehler indem dort fürn=2 stehta"=1.88 ... statta"=0.88...

[6] Aufführlicher in der S. 187 genannten Abhandlung I, {\S} 5

[7] Wenn die BegrenzungEcken. besitzt, tritt der Fall stückweiser Stetigkeit, der auftretenden Fuktionen ein.

[8] Für die Herleitung vergleiche man z.B. Goursat:Cours d'Analyse mathématique, t. III. oder die Abhandlung II des Verfasser. 25-29643.Acta mathematica. 54. Imprimé le 18 mars 1930

[9] Ausführliche Behandlung in II, {\S}{\S} II-12.

[10] B. P. Moors:Valeur approximative, d'une intégrale définie, Paris 1905, {\S} 30, Table D.

[11] Über die Ausführung der Iteration vergleiche man die Arbeit vonv. Mises undH. Pollaczek-Geiringer in Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd 9 (1929), insbesondere S. 62–73. Diese Arbeit betrifft zunächstlineare Systeme, doch kann Vieles von dem dort Gesagten verall-gemeinert werden.

[12] Eine etwas andere Fehlerabschätzung findet man in II, {\S} 5. Ein Beispiel dazu in {\S} 6.

[13] Ist die Quadratur nicht elementar durchführbar, so muss man auch zur Bestimmung der Funktionf(s) Näherungsmethoden heranziehen.

[14] Die "Gleichung der erzuungenen Schwingung" liefert Beispiele zu diesem Paragraphen. In der Abhandlung II, {\S} 7 wird dielineare Randwertaufgabey"(s)+y(s)(Is 2)+1=0,y({\(\pm\)}1/2)=0 behandelt, die sich aus Schwingungen einer eingespannten Saite mit "parabolischer Massenverteilung" bezicht. Unsere Methode gibt eine gute Übereinstimmung mit den auf andere Weise berechneten Lösungen.