Stone, M. H.

Linear transformations in Hilbert space. III: Operational methods and group theory. (English) JFM 56.0357.01

Proc. Natl. Acad. Sci. USA 16, 172-175 (1930).

Die Arbeit schließt an frühere Noten des Verf. in [Proc. Natl. Acad. Sci. USA 15, 198–200, 423–425 (1929; JFM 55.0824.01)] an. Wenn T eine selbstadjungierte Transformation und die Schar E_λ die entsprechende "kanonische Zerlegung der Identität" ist, so wird $F(T)$ als die Transformation definiert, deren Feld genau diejenigen f umfaßt, für die

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2 \, dQ(E_\lambda f)$$

konvergiert, und die f in $F(T)f$ überführt, so daß

$$Q(F(T)f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \, dQ(E_\lambda f, g)$$

für jedes g des Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$. (Für die Bezeichnungen vgl. die oben angegebenen Arbeiten.)

Anwendung auf gruppentheoretische Fragen der Quantenmechanik: I. Wenn U_τ $(-\infty < \tau < +\infty)$ eine Gruppe von unitären Transformationen in $\mathfrak{H}$ mit

$$U_0 = I, \quad U_{-\tau} = U_\tau^{-1}, \quad U_{\sigma+\tau} = U_\sigma U_\tau$$

ist, so gibt es eine eindeutige selbstadjungierte Transformation T mit der kanonischen Zerlegung E_λ der Identität derart, daß

$$Q(U_\tau f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\lambda} \, dQ(E_\lambda f, g)$$

ist, während

$$\frac{U_\tau - U_0}{\tau} f \to iTf \qquad \text{für } \tau \to 0.$$

iT kann als erzeugende infinitesimale Transformation der Gruppe bezeichnet werden. – Ist umgekehrt T als selbstadjungierte Transformation gegeben, so gibt es eine einparametrige Gruppe von unitaren Transformationen der obigen Art, deren erzeugende infinitesimale Transformation gleich T ist.

II. Zwischen den selbstadjungierten Transformationen P_k, Q_k $(k = 1, \dots, n)$ sollen die *Heisenberg*schen Relationen bestehen:

$$P_k Q_l - Q_l P_k = i\delta_{kl} I, \quad P_k P_l - P_l P_k = 0, \quad Q_k Q_l - Q_l Q_k = 0.$$

$U_\tau^{(k)},$ und $V_\tau^{(k)}$ seien die durch iP_k und iQ_k erzeugten einparametrigen Gruppen von unitären Transformationen. Wenn die Transformationsschar $U_{\sigma_1}^{(1)} \dots U_{\sigma_n}^{(n)} V_{\tau_1}^{(1)} \dots V_{\tau_n}^{(n)}$ in $\mathfrak{H}$ irreduzibel ist, so gibt es eine eineindeutige isometrische Transformation S von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}_n$ derart, daß

$$SP_k S^{-1} f(x_1, \dots, x_n) = i \frac{\partial}{\partial x_k} f, \quad SQ_k S^{-1} f(x_1, \dots, x_n) = x_k f.$$

Dabei ist $\mathfrak{H}_n$ der Raum aller komplexwertigen, *Lebesgue*-integrablen Funktionen $f(x_1, \dots, x_n)$ mit konvergentem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 \, dx_1 \dots dx_n.$$

Reviewer: Doetsch, G., Prof. (Freiburg i. B.)

MSC:

46-XX Functional analysis

Full Text: DOI