Bliss, G. A.
An integral inequality. (English) JFM 56.0434.02
Journal L. M. S. 5, 40-46 (1930).

Es handelt sich in diesen beiden Noten um den Beweis des folgenden Satzes (*): Es seien m und n Konstanten mit $n > m > 1$, und es sei $f(x)$ für $0 \leqq x < \infty$ eine reelle, eindeutige, nicht negative Funktion, für die das *Lebesgue*sche Integral

$$J = \int_0^\infty f^m dx \tag{1}$$

existiert. Dann existiert auch das Integral

$$y = \int_0^x f dx \tag{2}$$

für jedes x, und es gilt

$$I = \int_0^\infty \frac{y^n}{x^{n-r}} dx \leqq k \left(\int_0^\infty f^m dx \right)^{\frac{n}{m}} = kJ^{\frac{n}{m}}, \tag{3}$$

wobei

$$r = \frac{n}{m} - 1, \quad k = \frac{1}{n-r-1} \left\{ \frac{r\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{r}\right)} \right\}^r$$

ist. In (3) gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn f die Form $\frac{\alpha}{(\beta x^r + 1)^{\frac{r+1}{r}}}$ hat oder von einer solchen Funktion nur auf einer Menge von x-Werten vom Maße Null abweicht.

Der Beweis dieses Satzes führt auf die Lösung eines irregulären Variationsproblems. Die Konstante k ist nämlich das Maximum des Integrals I für alle Funktionen $y(x)$ mit geeigneten Stetigkeitseigenschaften, welche den Bedingungen

$$J = \int_0^\infty y'^m dx = 1, \quad y(0) = 0$$

genügen.

Hardy und *Littlewood* gehen für den Beweis des Satzes (*) von der folgenden bekannten Ungleichung (*Hardy*, 1920; F. d. M. 47, 207 (JFM 47.0207.*); siehe auch *Iyengar*, 1930; F. d. M. 56_{I}, 203-204) aus: Aus

$$k > 1, \quad f(x) \geqq 0, \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

folgt

$$\int \frac{F^k}{x^k} dx \leqq \left(\frac{k}{k-1} \right)^k \int f^k dx, \tag{4}$$

wobei die Konstante $\left(\frac{k}{k-1} \right)^k$ die bestmögliche ist und in (4) das Zeichen $=$ dann und nur dann steht, wenn $f(x)$ fast überall gleich Null ist. *Hardy* und *Littlewood* deuten für (*) einen Beweis mit Hilfsmitteln der Variationsrechnung an, den sie aber nicht vollständig durchgeführt haben. Sie haben dann die Aufgabe dem Verf. der zweiten Note, *G. A. Bliss*, vorgelegt; denn "we found our knowledge of the calculus of variations inadequate".

Bliss gibt einen Beweis zunächst für stetige Funktionen $f(x)$ und zeigt dann, daß er sich auf alle meßbaren Funktionen $f(x)$ übertragen läßt, für die das Integral (1) existiert. Der Beweis ist so dargestellt, daß er auch ohne Kenntnisse aus der Variationsrechnung verständlich ist; am Schluß seiner Note gibt *Bliss* einen Überblick über diejenigen Sätze aus der Variationsrechnung, die zu dem Beweise geführt haben.

Als Folgerung aus dem Satze (*) geben *Hardy* und *Littlewood* in ihrer Note eine weitere Integralungleichung an. (IV 2, 3 C.)

Reviewer: Feigl, G., Prof. (Breslau)

Full Text: DOI