Delsarte, J.
Sur certains sous-groupes du groupe de Fredholm. (French) JFM 56.1023.01
Annales Soc. Polonaise 8, 68-176 (1930).

Im Anschluß an einige frühere Arbeiten des Verf. über die *Fredholm*sche Gruppe, die aus den Transformationen

$$g(s) = f(s) + \int_0^1 K(s,t) f(t)\, dt$$

besteht, werden in dieser Abhandlung Untergruppen aller Art, die in dieser Gruppe enthalten sind, studiert: endliche, kontinuierliche r-parametrige und infinite Untergruppen. Zu den letzteren gehören die Gruppe der euklidischen Rotationen, die durch die Invariante $\int_0^1 f^2(s)\, ds$ definiert ist, und die Gruppe der Dilatationen, d.h. der Transformationen mit symmetrischem Kern. Ebenso wie im Raum von endlich vielen Dimensionen gilt der Satz, daß jede *Fredholm*sche Transformation sich zusammensetzen läßt aus einer euklidischen Rotation und einer Dilatation. Die Gruppe der nichteuklidischen Rotationen, besteht aus den Transformationen, die die allgemeine definite quadratische Form

$$\int_0^1 f^2(s)\, ds + \int_0^1 \int_0^1 S(s,t) f(s) f(t) ds dt$$

mit symmetrischem Kerne $S(s,t)$ invariant lassen. Sie ist isomorph der Gruppe der euklidischen Rotationen, und ihre endlichen Untergruppen sind die einzigen endlichen Untergruppen der *Fredholm*schen Gruppe. Sie sind isomorph den fünf klassischen Polyedergruppen.

Die im zweiten Abschnitt behandelten r-parametrigen Untergruppen bestehen aus einer Menge von Transformationen mit Gruppencharakter, deren zugehörige Kerne von r Parametern abhängen. Der Fall $r = 1$, der auf die *Volterra*sche Gruppe führt, ist bereits von mehreren Autoren behandelt worden. Mit passend gewähltem Parameter t lautet die zu dieser Gruppe gehörige Integrodifferentialgleichung

$$\frac{\delta}{\delta t} g(x) = \int_0^1 A(x,y) g(y) dy$$

und ihre Lösung

$$g(x) = f(x) + \int_0^1 A(x,y|t) f(y) dy,\ A(x,y|t) = \frac{t}{1!} A(x,y) + \frac{t^2}{2!} A^{(2)}(x,y) + \cdots .$$

Verf. diskutiert sodann die Funktionalableitungsgleichung für die Funktionale $F\{|f|\}$, die bei den Transformationen dieser Gruppe invariant bleiben:

$$\int_0^1 \int_0^1 A(x,y) f(x) F'_{f(x)}\{|f|\,|x\} dx dy = 0$$

und ermittelt den expliziten Ausdruck ihrer allgemeinen Lösung im Falle des "symmetroiden" Kernes $A(x,y)$. Die symmetroiden Kerne, die dadurch definiert sind, daß das System ihrer Eigenfunktionen φ zusammen mit den Funktionen ϱ, die die Linearmannigfaltigkeit der Lösungen von $\int_0^1 A(x,y) f(x) dx = 0$ aufspannen, ebenso wie das dazu biorthogonale System vollständig ist, erweisen sich als bedeutsame Erweiterung der symmetrischen Kerne.

Durch Auflösung des Systems der Integrodifferentialgleichungen, die zur zweiparametrigen Gruppe gehören" weist schließlich der Verf. nach, daß es zwei Typen von solchen Gruppen gibt: die verallgemeinerte *Volterra*sche Gruppe, die isomorph ist der Gruppe der Translationen in der Ebene, und eine nichtabelsche Gruppe. Die erstere ist geknüpft an zwei Kerne $A(s,t)$ und $B(s,t)$, für die

$$\{A,B\}=\int\limits_0^1 A(s,u)B(u,t)du-\int\limits_0^1 A(u,t)B(s,u)du=0$$

ist, die letztere an zwei linear unabhängige Kerne, für die

$$\{A,B\}=\alpha A+\beta B$$

mit konstanten α und β, die von Null verschieden sind. Auch hier ist besonders erwähnenswert der Spezialfall, daß einer der Kerne, z. B. $A(s,t)$, symmetroid ist. Dann kann die letztere Bedingung nur für besondere Werte von β erfüllt werden, und diese lassen sich ebenso wie die zugehörigen Kerne B, die auch symmetroid sind, explicite angeben, wenn $A(s,t)$ und α bekannt sind.

Reviewer: Golomb, M., Dr. (Zagreb)