Schnirelmann, L.

**Über eine neue kombinatorische Invariante.** (German) JFM 56.1134.01

Monatshefte f. Math. 37, 131-134 (1930).

Im Zusammenhang mit Fragen der Variationsrechnung im Großen haben Verf. und *Lusternik* (C. R. 188 (1929), 534-536; JFM 55.0316.*) eine topologische Invariante der abgeschlossenen Mengen einer Mannigfaltigkeit, die "Kategorie", eingeführt durch die folgende Definition: Eine abgeschlossene Menge $A$ in $M$ hat die Kategorie 1, wenn sie in $M$ stetig auf einen Punkt zusammengezogen werden kann; $A$ hat die Kategorie $k$ (in Zeichen: $\mathrm{cat}_M A = k$), wenn $A$ in $k$, aber nicht in weniger als $k$ Teile von erster Kategorie zerspalten werden kann. Verf. führt die Kategorie hier axiomatisch ein durch das folgende Axiomensystem, in dem (a)-(f) bekannte Eigenschaften der Kategorie ausdrücken (vgl. das vorangehende Referat):

(a) $\mathrm{cat}_M A$ ist eine ganzzahlige Funktion der abgeschlossenen Teilmengen einer Mannigfaltigkeit $M$.

(b) $\mathrm{cat}_M a = 1$ für jeden Punkt $a$.

(c) $\mathrm{cat}_M A \geqq \mathrm{cat}_M B$, wenn $A \supset B$.

(d) $\mathrm{cat}_M (A + B) \leqq \mathrm{cat}_M A + \mathrm{cat}_M B$.

(e) Wenn $B$ aus $A$ durch Deformation entsteht, gilt $\mathrm{cat}_M A \leqq \mathrm{cat}_M B$.

(f) Für genügend kleines $\varepsilon$ gilt $\mathrm{cat}_M S(A, \varepsilon) \leqq \mathrm{cat}_M A$, wenn $S(A, \varepsilon)$ die Menge der Punkte von $M$ bezeichnet, deren Abstand von $A$ höchstens gleich $\varepsilon$ ist.

(g) Für jede ganzzahlige Funktion $n(A)$ der abgeschlossenen Teilmengen von $M$, die (a)-(e) erfüllt, gilt $n(A) \leqq \mathrm{cat}_M A$.

Auf Grund des Pflastersatzes der Dimensionstheorie wird gezeigt: Die Dimension einer abgeschlossenen Menge von der Kategorie $k$ ist mindestens $k - 1$.

Verf. führt dann noch eine neue Invariante, die "kombinatorische Kategorie" $\underline{\mathrm{cat}}_M L$ ein, die für Teilkomplexe $L$ von $M$ definiert und daher leichter zu berechnen ist; sie führt, da sie stets höchstens gleich der Kategorie ist, in vielen Fällen zu Abschätzungen der Kategorie. Die Definition lautet: $\underline{\mathrm{cat}}_M L = 1$, wenn jeder Zyklus von $L$ in $M$ homolog 0 ist; $\underline{\mathrm{cat}}_M L = k$, wenn $L$ in $k$, aber nicht weniger als $k$ Teilkomplexe von erster kombinatorischer Kategorie zerspalten werden kann. Zur Berechnung der kombinatorischen Kategorie dienen die folgenden Sätze: $M = M_0$, $M_1, \ldots, M_r$ sei eine Folge von Teilmannigfaltigkeiten von $M$ von der Eigenschaft, daß jeder Zyklus von $M_\varrho$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$), der in $M_{\varrho-1}$ homolog 0 ist, auch in $M_\varrho$ homolog 0 ist ($M_{\varrho-1} \supset M_\varrho$; Mannigfaltigkeiten, Zyklen, Homologien mod 2); dann gilt $\underline{\mathrm{cat}}_M M \geqq r + 1$ und $\underline{\mathrm{cat}}_M M_1 \geqq r$. Insbesondere ergeben sich hieraus Aussagen über die Kategorie der projektiven Räume und gewisser Produktmannigfaltigkeiten, so z. B. des Produktes von $n$ Kreisen.

Reviewer: Pannwitz, Erika, Dr. (Berlin)



**Full Text:** DOI

## References:

[1] L. Lusternik u. L. Schnirelmann, Existence de trois lignés géodésiques fermées sur toute surface de genre O, Comptes rendus, 18 février 1929. · Zbl 55.0316.01

[2] L. Lusternik, Topologische Grundlagen der allgemeinen eigenwerttheorie. · Zbl 56.1133.04

[3] Dieser Satz ist bisher nur für Riemannsche Mannigfaltigkeiten bewiesen.

[4] S. Lefschetz, Trans. Am. Math. Soc., Bd. 26, S. 3.

[5] O. Veblen, Trans. Am. Math. Soc., Bd. 25, S. 540.

[6] In diese, gegenüber meiner ursprünglichen Darstellung vereinfachte Form wurde der Beweis von Herrn Frankl gebracht.

[7] L. Pontrjagin, Göttinger Nachrichten. Sitzung 9. III. 1928; der Satz ergibt sich im Verlaufe des Beweises des Satzes II dieser

Arbeit, ist aber nicht explizit formuliert.

[8] Siehe z. B. S. Lefschetz, l. c. Trans. Am. Math. Soc., Bd. 26, S. 29.

[9] Dieser Satz folgt, wie mir Herr Pontrjagin mitgeteilt hat, aus einem Satz von Lefschetz, l. c. Trans. Am. Math. Soc., Bd. 26, S. 32.