Bernstein, S.
Sur les fonctions absolument monotones. (French) JFM 55.0142.07
Acta Math. 52, 1-66 (1928).

Unter einer vollständig monotonen Funktion (fonction absolument monotone) im Intervall (a, b) versteht Verf. eine Funktion $f(x)$, für welche alle Differenzen

$$\Delta^0 f(x) = f(x), \Delta^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) = f(x), \dots$$

nicht negativ sind, wenn $h \geqq 0$, vorausgesetzt, daß alle Argumentwerte, die in diesen Ausdrücken vorkommen, dem Intervall (a, b) angehören. Eine vollständig monotone Funktion in (a, b) ist analytisch auf (a, b) und dort durch eine *Taylor*sche Reihe $\sum\limits_0^\infty A_n(x-a)^n$ darstellbar, mit $A_n \geqq 0$. Jede im Intervall (a, b) reelle analytische Funktion, die durch eine *Taylor*sche Reihe $\sum\limits_0^\infty a_n(x-a)^n$ vom Konvergenzradius $\geqq b-a$ darstellbar ist, läßt sich als Differenz zweier in (a, b) vollständig monotoner Funktionen ausdrücken. Deshalb spielen die vollständig monotonen Funktionen dieselbe fundamentale Rolle in der Theorie der reellen analytischen Funktionen einer reellen Variabeln wie die einfach monotonen in der Theorie der Funktionen beschränkter Schwankung.

Ist $f(x) = \sum\limits_0^\infty A_n x^n$ im Intervall $(0, R)$ vollständig monoton, und ist R' der Konvergenzradius der Reihe, so ist $R \leqq R'$ und f ist noch in $(0, R')$ vollständig monoton. Es fragt sich: Unter welchen Bedingungen bleibt die Funktion im Intervall $(-c, R')$, $c > 0$, vollständig monoton. Verf. gibt notwendige Bedingungen dafür an. Sie sind einfacher abzuleiten, wenn $c = -\infty$. Ist c endlich, so treten Besonderheiten arithmetischer Natur auf. Verf. gibt insbesondere Ungleichungen für die Funktionen, die in $(-c, R')$ oder in $(-\infty, R')$ vollständig monoton sind. Er behandelt hauptsächlich das Problem der Bestimmung des größten Intervalles vollständiger Monotonie einer Funktion, deren endlich oder unendlich viele Ableitungen in einem Punkt gegeben sind, und die Frage der eindeutigen Bestimmung dieser Funktion. Diese Untersuchung ist mit der Theorie der divergenten Reihen eng verknüpft und gestattet, das von *Hamburger* und *Carleman* gelöste Momentenproblem unabhängig von der Kettenbruchtheorie zu behandeln, wie am Schluß der Abhandlung gezeigt wird.

Reviewer: Plancherel, Prof. M. (Zürich)

Full Text: DOI

References:

[1] S. Bernstein, ”Leçons sur les propriétés extrémales etc.” (Collection de Monographies publiée sous la direction de M. E. Borel), Première Note (pp. 193–197).

[2] Je rappellerai que la thèorie classique des moments de Stieltjes a été complétée recemment parM. H. Hamburger, ”Steiltjessches Momentenproblem”, Math. Ann. Bd. 81 (235–315), Bd. 82 (120–164) etM. T. Carleman, ”Sur les équations intégrales singulières à noyaux réel et symétrique; je signalerai aussi les Mémoires deM. Hausdorff ”Summationsmethoden und Momentfolgen”, Math. Zeitschrift Bd. 9 et ”Momentproblem für endliches Intervall” (dont j'ái pris connaissance pendant la rédaction de ce travail) qui aborde le problème des moments par des méthodes présentant certaines analogies avec les miennes.

[3] Nous nous plaçons ici au point de vue purement reel; peu nous importe par conséquent la ou les valeurs qu'on ferait prendre à la fonctionf(x) pourx>R, en la prolongeant à travers le plan de la variable complexe. Dans le dernier chapitre seulement nous serons amenés à envisager également nos fonctions pour des valeurs complexes de la variablez=x+iy, en supposant, toujours cependant la partie réelle dex.

[4] Tous les paramètres seront différents de o, si on admet, ce que nous pouvons faire, que le signe d'égalité n'apparait pas dans (33), car autrement la fonctionF(x) se réduirait elle même à un polynôme exponentiel.

[5] Nous supponsons toujours, bien entendu, remplies les conditions (18) pour qu'il existe au moins une fonction absolument

monotone.

[6] Ainsi les conditions (18) (ou l'hypothèse de monotonie absolue) représentent des conditions de quasianalyticité (au sens général de ce mot) d'une nature toute différente de celles de M. Carleman, puisque la croissance des dérivées successives n'est pas limitée par ces conditions, du moment qu'une modification convenable deF' (o) (ouF(o)) rend la fonctionF(x) parfaitement déterminée par ses valeurs initiales.

[7] L'ordre des polynômes qui admettent les deux représentations est égal au plus petit des deux nombres correspondants.

[8] qui représente alors cette fonction unique.

[9] Il est évident que, si la dernière derivée seulement s'annulait, c'est le polynômeP(x)=F(o)+...+xm/(m)!F(m)(o) qui serait la seule fonction absolument monotone pourx<0, etL serait égal au module de la plus petite en valeur absolue das racines négatives deP(x)=0,P'(x)=0,...,P (m) (x)=0.

[10] Dans le cas, où les conditions initiales seraientm valeurs quelconques de la fonction aux points donnés du segment (, 0), il faut ajouter que ce polynôme principal dégénéré doit avoir des lacunes, car on ne peut plus affirmer que le polynôme doit être au moins du degrém (comme cela a leiu quandF (m)(0)>0).

[11] Voir la Note de mes "Leçons sur les propriétés extrémales etc." page 191 et suiv.

[12] Il est aisé de vérifier que, si le signe d'égalité a lieu, pour, une valeur de {\(\eta\)} il subsiste pour toutes les valuers supérieures, etF(x) se réduit alors à un polynôme exponentiel.

[13] On pourrait aussi arriver à la même conclusion, en appliquant les considérations de la page 20.

[14] Pourx réel on af2h(x)2h+2(x); par conséquent,f2h(x) croîtra indéfiniment pourx=x 0 ou bien tendra vers une fonction exponentiellement convexe, sur tout le segment (0,x 0). Le rayon de convergenceR de la série (87) est donc déterminé par la propriété que, si |x 0|<R, en peut tonjours fixer un nombreL, tel quef2h({\(\pm\)}x 0)<L, etque cela n'est plus possible, si |x 0|>R.

