Pólya, G.
Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. (German)
JFM 55.0186.02
M. Z. 29, 549-640 (1929).

Diese Arbeit gibt eine zusammenfassende Darstellung früher publizierter Einzelresultate und veröffentlicht neue Ergebnisse über den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten einer *Taylor*reihe und den Singularitäten der durch sie dargestellten Funktion.

Im 1. Kap. werden Begriffe der Theorie der unendlichen Folgen besprochen, die nachher bei der Untersuchung der Lücken einer Potenzreihe beständig angewendet werden. Es sei eine Folge positiver Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ gegeben, so daß $\underline{\lim}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$. Wenn $\lim \frac{n}{\lambda_n}$ existiert, bezeichnet der Verf. die Folge als meßbar und diesen Grenzwert als die Dichte der Folge. In der Einführung neuer Dichtigkeitsbegriffe für nicht meßbare Folgen und der Diskussion der Zusammenhänge zwischen denselben besteht im wesentlichen das 1. Kapitel.

Im 2. Kap. wird einerseits der Zusammenhang zwischen der Funktion

$$f(z)=\frac{a_0}{z}+\frac{a_1}{z^2}+\cdots$$

(Konvergenzradius $\varrho\neq 0,\infty$) und der ihr assoziierten ganzen Funktion

$$F(z)=a_0+\frac{a_1 z}{1!}+\cdots$$

vom Exponentialtypus und andererseits der Zusammenhang zwischen der Reihe

$$F(0)+F(1)e^{-z}+\cdots=\psi(z)\ \text{ und } F(z)$$

untersucht. Das Wachstum der Funktion $F(z)$ kann längs eines Halbstrahles, der mit der positiven reellen Achse den Winkel φ einschließt, gemessen werden mit der Funktion

$$h(\varphi)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1}\log|F(re^{i\varphi})|.$$

Phragmén und *Lindelöf* haben gezeigt, daß $h(\varphi)$ die Stützfunktion eines beschränkten, konvexen Bereichs, vom Verf. als Indikatordiagramm von $F(z)$ bezeichnet, darstellt. Mit Hilfe der *Laplace*schen Transformation zeigt der Verf., ein bekanntes Ergebnis von *Borel* verschärfend, daß $f(z)$ regulär ist außerhalb des Spiegelbildes des Indikatordiagrammes in bezug auf die reelle Axe, und daß jeder extreme Punkt dieses konjugierten Diagrammes einen singulären Punkt von $f(z)$ darstellt. Ebenso gelingt es dem Verf., die Singularitäten von $\psi(z)$ mit Hilfe des Indikatordiagrammes von $F(z)$ zu beschreiben und damit frühere Resultate von *Lindelöf*, *Carlson* u. a. zu verschärfen. Diese Resultate betreffend $f(z)$ und $\psi(z)$ können als spezielle Fälle eines allgemeinen Satzes betrachtet werden, der sich auf eine gewisse Klasse von linearen, von *Pincherle* eingeführten Funktionaloperationen bezieht. Als Spezialfall des Satzes betr. den Zusammenhang der Singularitäten von $\psi(x)$ und das Indikatordiagramm von $F(z)$ beweist der Verf. Verschärfungen der *Hadamard-Faber*schen Lückensätze.

Im 3. Kap. untersucht der Verf. die Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer ganzen transzendenten Funktion und ihren *Julia*-Halbgeraden oder *Julia*schen Richtungen. Bekanntlich besitzt jede ganze transzendente Funktion solche vom Nullpunkt ausgehenden Halbstrahlen, in deren beliebiger Winkelumgebung die Funktion jeden Wert bis auf höchstens einen unendlich oft annimmt. Solche Halbgeraden werden als *Julia*-Halbgeraden oder *Julia*sche Richtungen der Funktion bezeichnet. Der Verf. zeigt, daß die *Bloch*sche Vermutung, es möchte zwischen der Verteilung der singulären Stellen einer *Taylor*reihe mit endlichem Konvergenzradius und zwischen der Verteilung der *Julia*-Halbgeraden einer ganzen Funktion eine gewisse Analogie bestehen, zum mindesten für ganze Funktionen unendlich hoher Ordnung richtig ist. Es gilt z. B. der folgende Satz: Es sei vorgelegt eine beliebige ganze Funktion unendlicher Ordnung. Durch die Abänderung der Vorzeichen gewisser geeignet gewählter Koeffizienten entsteht eine Funktion, für welche alle Richtungen *Julia*sche Richtungen sind.

Reviewer: Saxer, Prof. W. (Goldbach-Küßnacht)

Full Text: DOI Link EuDML