Landau, E.
Über die Blochsche Konstante und zwei verwandte Weltkonstanten. (German)
JFM 55.0770.03
M. Z. 30, 608-634 (1929).

Die Arbeit knüpft an an den *Bloch*schen Satz:

Es gibt eine absolute positive Konstante P mit folgender Eigenschaft:

Es sei $f(x)$ für $|x| \leqq 1$ regulär, $f'(0) = 1$. Dann gibt es eine in $|x| < 1$ *schlicht* angenommene offene Kreisfläche des Radius P.

Unter $\mathfrak{B}$ (*Bloch*sche Konstante) versteht Verf. die obere Grenze aller dieser P, unter $\mathfrak{L}$ die obere Grenze der P, für die der obige Satz unter Weglassung des Wortes "schlicht" gilt, sodaß also

$$0 < \mathfrak{B} \leqq \mathfrak{L}$$

gilt.

Zu jedem $\delta > 0$ existiert also eine den Voraussetzungen des *Bloch*schen Satzes genügende Funktion $f_\delta(x)$, sodaß jedes schlicht bedeckte Kreisinnere einen Radius $< \mathfrak{B}(1+\delta)$ hat, und eine auch die Voraussetzungen des *Bloch*schen Satzes erfüllende Funktion $f^*_\delta(x)$, so daß jedes bedeckte Kreisinnere einen Radius $< \mathfrak{L}(1+\delta)$ hat. Im Verlaufe der Arbeit zeigt sich, daß es eine Konstante $\delta_0 > 0$ gibt, so daß kein $f^*_{\delta_0}(x)$ und also kein $f_{\delta_0}(x)$ schlicht ist.

$\mathfrak{U}$ sei die obere Grenze aller Konstanten $P > 0$, so daß jedes für $|x| \leqq 1$ reguläre und schlichte $f(x)$ mit $f'(0) = 1$ dort eine offene Kreisscheibe des Radius P annimmt, so daß also $\mathfrak{U} \geqq \mathfrak{L}$ ist.

Der Aufbau der Arbeit ist folgender:

Nach Herleitung zweier funktionentheoretischer Hilfsmittel gibt Verf. zunächst einen sehr einfachen Beweis des *Bloch*schen Satzes von sich und *Valiron* (*Landau*, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1926, 467-474; F. d. M. 52. *Valiron*, Rendiconti Palermo 54 (1930), 76-82; F. d. M. 56_{I} 269) und zeigt, daß die Konstanten $\mathfrak{B}, \mathfrak{L}$ und $\mathfrak{U}$ ihren Wert beibehalten, wenn man die zugrunde gelegten Funktionen $f(x)$ überdies der Bedingung

$$|f'(x)| \leqq \frac{1}{1 - |x|^2}$$

für $|x| < 1$ unterwirft.

Dann beweist der Verf. folgenden Satz:

Für $|x| < \mathfrak{R}$ sei

$$f(x) = a_1 x + \cdots$$

regulär,

$$|a_1| = a > 0$$
$$|f(x)| \leqq M.$$

Dann bedeckt das Bild den Kreis

$$|Y| < tM,$$

wo $t = 1$ für $M = \mathfrak{R}a$ und t für $M > \mathfrak{R}a$ die Lösung von

$$\frac{\mathfrak{R}a}{M} = \frac{2t}{1-t^2} \log \frac{1}{t}, \quad 0 < t < 1$$

ist. Und zwar ist tM die größtmögliche Funktion von $\mathfrak{R}, a, M$, welche dies leistet.

Verf. beweist zugleich auf einfacherem Wege eine schwächere Fassung dieses Satzes, die auch ausreicht für die *Picard-Schottky*schen Sätze.

Mit derselben Methode, die auf den obigen Satz führt, ergibt sich sodann

$$\mathfrak{L} \geqq 0,43.$$

Nach oben ergibt sich dann durch einfache Angabe eines Beispiels

$$\mathfrak{L} \leqq \frac{e}{4}$$

und unter Heranziehung von geometrischen Betrachtungen und von Ergebnissen von *Carathéodory* und *Hartogs*

$$\mathfrak{L} \leqq \frac{2^{\frac{2}{3}}\pi\Gamma^3(\frac{1}{3})}{\Gamma^4(\frac{1}{4})}.$$

Für $\mathfrak{B}$ teilt Verf. einen von *Grandjot* herrührenden Beweis von

$$\mathfrak{B} \geqq \frac{28-16\sqrt{2}}{15}$$

und die Verschärfung des *Grandjot*schen Ergebnisses zu

$$\mathfrak{B} \geqq \operatorname*{Max}_{0\leqq r<1} (r - \int_0^r \operatorname*{Min}_{M\geqq \frac{1}{1-t^2}} \varphi(t,M)\,dt),$$

wo

$$R = \sqrt{\frac{M-1}{M}},$$
$$\varphi(t,M) = (M^2-1)\left[\frac{M-1}{t^2}\frac{1+\dfrac{t}{(M+1)R}}{\dfrac{1}{M+1}+\dfrac{t}{R}} - 1\right]^{-1},$$

(also $\mathfrak{B} > 0,39$) mit.

Für $\mathfrak{U}$ hat *Reinhardt* (Jahresbericht D.M. V. 37, 83-86; F. d.M. 54, 378)

$$\mathfrak{U} \geq \frac{1}{2}$$

bewiesen. Verf. zeigt sogar

$$\mathfrak{U} \geqq \sqrt{\frac{3}{10}}.$$

Dann leitet Verf. eine Integralabschätzung her, die von ihm in schwächerer Fassung zum Beweis von

$$\mathfrak{U} > \mathfrak{L}$$

verwendet, von *Valiron* unverbesserlich verschärft und in ihrem Beweis von *Schoenberg* und dem Verf. vereinfach wurde.

Diese Abschätzung führt dann vermittels *Löwner*scher Ergebnisse (Math. Ann. 89 (1923), 103-121; F. d. M. 49, 714 (JFM 49.0714.*)-715) zu folgendem Satz:

Es sei

$$f(x) = \frac{1}{x} + a + bx + \cdots$$

für $0 < |x| < 1$ regulär, $\neq 0$ und schlicht. Es sei

$$|b| \leqq \Theta \leqq 1.$$

Dann ist

$$|a| \leqq 2V\left(\frac{1+\Theta}{4}\right),$$

und dies ist die bestmögliche nur von Θ abhängige Schranke. Hierin kann die Konstante V genau charakterisiert werden.

Schließlich liefert die *Valiron*sche Abschätzung (und auch eine weniger scharfe Abschätzung derselben Art)

$$\mathfrak{U} \geqq \frac{9}{16}$$

und also $\mathfrak{U} > \mathfrak{L}$.

In einer großen Zahl von Fußnoten stellt Verf. ferner mehrere Irrtümer und Fehlschlüsse der einschlägigen Literatur richtig. (IV 5.)

Reviewer: Müller, Studienassessor K. (Fürstenwalde)

Full Text: DOI EuDML Link