Nevanlinna, Rolf

Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes. (French)

JFM 55.0773.03
VII + 174 p. Paris, Gauthier-Villars (Collections de monographies sur la théorie des fonctions) (1929).

Für die allgemeine Tendenz des vorliegenden Buches darf auf die Besprechung der großen Acta-Arbeit des Verf. (1925; F. d. M. 51, 254 (JFM 51.0254.*)-256) verwiesen werden; ebenso für den Inhalt des ersten Hauptsatzes der Theorie der meromorphen Funktionen und für die Erklärung der Grundbegriffe.

Die ersten drei Kapitel (Der erste Hauptsatz; Sätze von *Hadamard* über die ganzen Funktionen endlicher Ordnung und ihre Erweiterungen auf meromorphe Funktionen; Kanonische Darstellung einer meromorphen Funktion endlicher Ordnung) stehen im Zeichen des ersten Hauptsatzes. Im zweiten Kapitel werden die neuen Begriffe – die durch $N(r,z), m(r,z), T(r,f)$ bezeichneten Größen – zu denen der älteren Theorie in Beziehung gesetzt und die Hilfsmittel zur Charakterisierung des Wachstums dieser Funktionen erläutert. Nun ergeben sich die alten *Hadamard*schen Sätze über die Beschränkung der Nullstellenzahl durch das Wachstum einer ganzen Funktion, sowie über die Beschränkung ihres Betrages nach unten auf beliebig großen Kreisen neben anderen ähnlichen als einfache Korollare zum ersten Hauptsatz.

Im dritten Kapitel wird zuerst nach einer Methode von *F. Nevanlinna* (1923; F. d. M. 49, 214 (JFM 49.0214.*)) die Darstellung einer meromorphen Funktion als Quotient zweier *Weierstraß*scher Produkte abgeleitet. Es folgen die Beziehungen zwischen Geschlecht und Ordnung und Ähnliches ; hier schon ergeben sich gewisse Verschärfungen des *Picard*schen Satzes für Funktionen von nicht ganzzahliger Ordnung.

Das vierte Kapitel behandelt den zweiten Hauptsatz und seine Anwendungen. Er beruht auf einer Abschätzung nach oben von $m\left(r,\frac{f'}{f}\right)$ durch $T(r,f)$, die, wie der erste Hauptsatz, mittels der *Jensen-Nevanlinna*schen Formel gewonnen wird; es ergibt sich im wesentlichen

$$m\left(r,\frac{f'}{f}\right)=O(\log T(r,f)).$$

Wendet man dies auf $m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{f'}{f-z_\nu}\right)$ an und beachtet, daß $m\left(r,\sum_{\nu=1}^{q}\frac{1}{f-z_\nu}\right)$ im wesentlichen gleich der Summe der Konvergenzkomponenten gegen die beliebigen Werte z_ν ist, so gelingt es leicht unter Benutzung einfacher Rechenregeln für das m einer aus mehreren Funktionen rational zusammengesetzten Funktion, sowie mit Heranziehung des ersten Hauptsatzes für f und f', die Summe aller Konvergenzkomponenten mittels $T(r,f)$ nach oben abzuschätzen, wobei noch die Dichte der Nullstellen und Pole der Ableitung, also der mehrfachen Stellen von f, eingeht. Man erhält so die folgende allgemeine Form des zweiten Hauptsatzes:

$$(q-2)T(r)<\sum_{\nu=1}^{q}N(r,z_\nu)-N_1(r)+S(r). \tag{II}$$

Hier sind die z_ν beliebige, voneinander verschiedene, nicht notwendig endliche Werte; $N_1(r)$ mißt die Dichte der mehrfachen Stellen in analoger Weise wie $N(r,z)$ die Dichte der z-Stellen, wobei eine k-fache Stelle $(k-1)$-mal zählt; $S(r)$ ist eine Funktion, für die im wesentlichen gilt $S(r)<O(\log T(r,f)+\log r)$.

Dieser Satz ist nun der Kern der meisten Verschärfungen des *Picard*schen Satzes (ausgenommen sind natürlich dabei die Fragen, die sich auf die Verteilung der z-Stellen hinsichtlich des Argumentes beziehen, auf deren Erörterung im vorliegenden Werke ganz verzichtet wird). Vergleicht man zunächst nur die Ordnungen der beiden Seiten von (II), so ergeben sich die *Borel*schen Sätze, bei denen als Ausnahmewerte solche zählen, deren Dichtefunktion $N(r,z)$ von niedrigerer Ordnung als $T(r)$ ist; ähnlich auch die Verallgemeinerungen, die entstehen, wenn man in der Gleichung $f(x)=z$ anstelle der Konstanten z meromorphe Funktionen $\varphi(x)$ von niedrigerer Ordnung als $f(x)$ treten läßt.

Doch ergibt sich aus (II) viel mehr, wenn man den schärferen Vergleich von $N(r,z)$ und $T(r)$ mittels der

Unbestimmtheitsgrenzen von $\frac{N(r,z)}{T(r)}$ anwendet.

$$\delta(z) = 1 - \limsup \frac{N(r,z)}{T(r)}$$

wird Defekt des Wertes z genannt; nach dem ersten Hauptsatz gilt $0 \leqq \delta(z) \leqq 1$, und für einen *Borel*schen Ausnahmewert ist offenbar $\delta(z) = 1$. Nun werden als Ausnahmewerte schon solche angesehen, für die $\delta(z) > 0$. Von ihnen kann es zwar unendlich, aber nur abzählbar viele geben, und die Summe ihrer Defekte ist höchstens zwei.

Es werden dann kurz einige noch wenig geklärte Fragen gestreift, wie die, eine Funktion mit vorgegebenen Defekten zu bilden, sowie die Beziehungen zwischen Ausnahmewerten und asymptotischen Werten.

Der Satz über die Defektsumme ist gewonnen unter Vernachlässigung des Gliedes $N_1(r)$ in (II), das die Dichte der mehrfachen Stellen mißt. Definiert man analog zum Defekt den Verzweigungsindex durch

$$\mu(z) = \liminf \frac{N(r,z) - \overline{N}(r,z)}{T(r)},$$

wo $\bar{N}(r,z)$ die Dichte der z-Stellen ohne Rücksicht auf ihre Vielfachheit bedeutet, so ist natürlich wieder $0 \leqq \mu(z) \leqq 1$, und es gibt nur abzählbar viele Werte mit positivem Verzweigungsindex. Der Satz über die Defektsumme ist nun zu verschärfen durch

$$\sum \delta(z) + \sum \mu(x) \leqq 2.$$

Vernachlässigt man hier $\sum \delta(z)$, so folgt in Analogie zum *Picard*schen Satz, daß es höchstens vier total verzweigte Werte geben kann, d. h. solche, die nur als mehrfache auftreten. Die *Weierstraß*sche $\wp$-Funktion z. B. gibt den Beleg, daß die Schranke scharf ist. – Es folgen noch einige Sätze über die charakteristischen Funktionen der Ableitung einer meromorphen Funktion.

Endlich lassen sich aus dem zweiten Hauptsatz fast unmittelbar Folgerungen über die eindeutige Bestimmtheit einer meromorphen Funktion durch die Gesamtheit ihrer z-Stellen für eine gewisse Anzahl von z-Werten ziehen. Es ergibt sich der Satz, daß zwei meromorphe Funktionen, die fünf Werte immer gleichzeitig annehmen (ohne Rücksicht auf ihre Vielfachheit) identisch sind; ferner entsprechende Verschärfungen, in denen das asymptotische Verhalten der Dichte solcher Stellen, in denen beide Funktionen denselben Wert annehmen, von Bedeutung ist.

Das fünfte Kapitel (meromorphe Funktionen, die durch eine lineare Relation verknüpft sind) beschäftigt sich mit Verallgemeinerungen von *Borel*schen Sätzen über linear abhängige ganze und nullstellenfreie Funktionen (1896, 1897; F. d. M. 27, 321 (JFM 27.0321.*); 28, 360), die bekanntlich den *Picard*schen Satz unifassen. Auch hier werden analoge Verallgemeinerungen wie die obigen des *Picard*schen Satzes gewonnen; es genügt z. B. jetzt die Voraussetzung, daß die Nullstellen nur in einer gewissen geringen Dichte auftreten. Dieser *Borel*sche Satz, ohne die genannte Verallgemeinerung, dient nur als Grundlage zur Gewinnung schärferer Eindeutigkeitssätze. Eine meromorphe Funktion ist schon durch die Verteilung von vier Werten, wenn die Vielfachheit mitberücksichtigt ist, im wesentlichen eindeutig bestimmt, ja sogar schon durch die von drei Werten, wenn man von gewissen angebbaren Ausnahmen absieht.

Im letzten Kapitel werden die im Einheitskreise meromorphen Funktionen betrachtet. Zunächst läßt sich der erste Hauptsatz übertragen. Doch ergibt sich sofort ein wesentlicher Unterschied: $T(r,f)$ kann natürlich beschränkt sein, und es wird gezeigt, daß das dann und nur dann der Fall ist, wenn $f(x)$ sich als Quotient zweier beschränkter Funktionen darstellen läßt. Die Ordnung wird hier definiert durch Vergleich von $T(r)$ mit der Skala $\frac{1}{(1-r)^\lambda}$ anstelle von r^λ.

Auch der zweite Hauptsatz läßt sich übertragen, doch kann jetzt das Glied $S(r)$ wesentlich werden. So ergibt sich, daß der *Picard*sche Satz nur gültig bleibt für Funktionen, für die

$$\frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

nicht beschränkt ist; und noch schärfer: Wenn die Defektsumme die Zahl $p > 2$ übertrifft, so ist

$$\overline{\lim} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{1-r}} \leqq \frac{6}{p-2}.$$

Schließlich werden noch einige Eindeutigkeitssätze abgeleitet.

In einem Anhang wird die Methode von *F. Nevanlinna* zur Untersuchung der Werteverteilung (1927: F. d. M. 53, 300 (JFM 53.0300.*)) skizziert.

Am Schluß des Buches findet sich ein ausführliches Literaturverzeichnis.

Besprechungen: Mathesis 43 (1929), 172-173. G. Loria; Bollettino di Mat. (2) 11 (1932), XVI. H. T. H. P.; Nature 124 (1929), 542. L. Potin; Revue générale des Sc. 40 (1929), 613-614.

Reviewer: Grunsky, Dr. H. (Berlin)