von Neumann, J.

Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren. (German) JFM 55.0824.02

Math. Ann. 102, 49-131 (1929).

Im *Hilbert*schen Raume $\mathfrak{H}$ der komplexen Zahlenfolgen $x_1, x_2, \dots$ mit endlicher $\sum |x_\nu|^2$ (oder in einem isomorphen Raume) bezeichne man ein Element mit $f, g, \dots$, das innere Produkt $\sum x_\nu \bar{y}_\nu$ mit (f, g), und (f, f) mit $|f|^2$. Ein Operator R ist eine Funktion Rf, die in einer Teilmenge von $\mathfrak{H}$ definiert ist und Werte von $\mathfrak{H}$ annimmt. In naheliegender Weise sind Linearität, Beschränktheit [durch: $|Rf| \leqq C|f|$] und Fortsetzbarkeit eines Operators definiert. Ein Operator R heißt *Hermite*sch [kurz: H. O.], wenn erstens die kleinste lineare Hülle seines Definitionsbereiches überall dicht liegt und zweitens, soweit Rf und Rg Sinn haben, $(f, Rg) = (Rf, g)$ ist.

Eine Zerlegung der Einheit (kurz: Z. d. E.) ist eine in einem Intervall $a < \lambda < b$ definierte Schar von überall sinnvollen H. O. $E(\lambda)$ mit folgenden Eigenschaften: α) Wenn $\lambda \leqq \mu$, ist $E(\lambda)E(\mu) = E(\lambda)$; β) wenn $\lambda \geqq \lambda_0$, $\lambda \to \lambda_0$, gilt $E(\lambda)f \to E(\lambda_0)f$; γ) wenn $\lambda \to a$ oder $\lambda \to b$, gilt $E(\lambda)f \to 0$ bzw. $\to f$. – Wenn ein H. O. beschränkt ist, so gibt es nach *Hilbert* eine Z. d. E. mit endlichem a und b, so daß $(Rf, g) = \int_a^b \lambda d(E(\lambda)f, g)$; und umgekehrt erzeugt jede solche Z. d. E. einen beschränkten H. O. Für $a = -\infty$ und $b = +\infty$ beweist Verf. folgendes: Wenn das (*Stieltjes*sche) Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d|E(\lambda)f|^2$ endlich ist, so gibt es genau ein f^*, so daß, für alle g, $(f^*, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(F(\lambda)f, g)$ ist, und dies definiert den Operator $Rf = f^*$. Dieser R ist ein hypermaximaler H. O., und jeder hypermaximale H. O. kann mit Hilfe genau einer Z. d. E. auf diese Weise erzeugt werden. Hierbei bedeutet "Hypermaximalität" (der Begriff stammt von *Erhard Schmidt*) eine gewisse sehr starke Nicht-Fortsetzbarkeit von R. – Zum Beweise wird nach *Cayley* von R zum Operator $U = \frac{R + i1}{R - i1}$ übergegangen. Dieser ist längentreu, d. h. $|Uf| = |f|$, und R ist dann und nur dann hypermaximal, wenn U unitär, d. h. überall in $\mathfrak{H}$ sinnvoll ist. Ein Operator ist dann und nur dann unitär, wenn es eine Z. d. E. mit $a = 0$, $b = 1$ gibt, so daß $(Uf, g) = \int_0^1 e^{2\pi i\lambda} d(E(\lambda)f, g)$. – Zu jedem H. O. R gibt es zwei "Defektindices" m und n, $(m, n = 0, 1, 2, \dots, \infty)$. Damit R maximal sei, d. h. keine Fortsetzung auf einen umfassenderen H. O. zulasse, ist notwendig und hinreichend, daß Min $(m, n) = 0$; R ist dann und nur dann hypermaximal, wenn $m = n = 0$. Es gibt Operatoren, die maximal, aber nicht hypermaximal sind.

Die unbeschränkten H. O. benehmen sich auch sonst "pathologisch". Insbesondere approximieren die "Abschnittsspektra" in keinem Sinne das Spektrum einer unbeschränkten *Hermite*schen Matrix.

Reviewer: Bochner, Dr. S. (Princeton (USA))

Full Text: DOI EuDML Link

References:

[1] Die Funktionen dürfen komplexe Werte haben.

[2] Hellinger, Göttinger Inaugural-Dissertation 1907, S. 7; Carleman, Sur les équations intégrales à noyau réel et symétrique, Upsala 1923, S. 82.

[3] Das Eigenwertproblem der Integralgleichungen mit "beschränktem" Kerne wurde von Weyl gelöst (Göttinger Inaugural-Dissertation 1908) mit Hilfe der Hilbertschen Theorie der beschränkten Bilinearformen (Göttinger Nachr. 1906, S. 157–209). Auch für eine ausgedehnte Klasse selbstadjungierter Differentialoperatoren zweiten Grades, deren Koeffizienten singulär sein dürfen, erledigte Weyl das Eigenwertproblem (Math. Annalen68 (1910), S. 220–269). Eine noch allgemeinere Klasse von Integral-operatoren untersuchte Carleman (vgl. Anm. 4) Hellinger, Göttinger Inaugural-Dissertation 1907, S. 7).

[4] Die vollstetigen und die beschränkten Formen (bzw. Operatoren) wurden von Hilbert entdeckt, und er löste ihre Eigenwertproblem (Göttinger Nachr. 1906, S. 157–209), weiter untersucht wurden die beschränkten Bilinearformen von Hellinger, vgl. Anm. 4) Hellinger, Göttinger Inaugural-Dissertation 1907, S. 7, sowie Journal f. Math.136 (1909), S. 210–273.

[5] Z. B. Göttinger Nachr. 1907, S. 116–122.

[6] Den Beweis dieser, allgemein bekannten, Tatsachen (zusammen mit dem Fischer-F. Rieszschen Satze) werden wir im Kap. I und im Anhang I erbringen.

[7] Dies ist insofern historisch ungenau, als der Fischer-F. Rieszsche Satz erst nachher gefunden wurde. Dieselben Überlegungen haben in der neuen Quantentheorie eine wichtige Rolle gespielt, vgl. Schrödinger, Annalen d. Phys.79, 8 (1926), S. 734–756. · Zbl 52.0967.02 · doi:10.1002/andp.19263840804

[8] Z. B. Rend. d. Circ. Mat. d. Palermo25 (1908), S. 57–73.

[9] Was bei überall sinnvollen OperatorenA, B unterAB zu verstehen ist, ist klar.

[10] Stieljessches Integral!

[11] Der unter anderem der Anhang IV dieser Arbeit gewidmet wird.

[12] Bei singulären Integraloperatoren fand schon Carleman Zeichen dieser Mehrdeutigkeit, jedoch konnte er in diesem Falle das Eigenwertproblem nicht ganz lösen (es fehlte das Analogon der entscheidenden Bedingung ({\(\alpha\)}) aus IV.). Vgl. Anm. 4). Hellinger, Göttinger Inaugural-Dissertation 1907, S. 7.

[13] Vgl. eine demnächst im Journal f. Math. erscheinende Arbeit des Verfassers: "Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen".

[14] Der Verfasser konnte mit dieser Methode den Fall reeller H. O. (vgl. Anm. 20)) erledigen, wo der in VII. angedeutete Ausnahmefall noch nicht in Erscheinung trat. Dabei konnte aber der Fortsetzungsprozeß der H. O. nicht so übersehen werden, wie es etwa im Kap. VIII der Fall sein wird, und die Methode war derart unkonstruktiv, daß dabei z. B. der Wohlordnungssatz herangezogen werden mußte (vgl. die Ankündigung im Jahresber. d. D. Math.-Ver.37, 1–4 (1928), S. 11–15), auch war den nichtreellen H. O. so nicht beizukommen. – Der Verfasser möchte es nicht versäumen, Herrn E. Schmidt an dieser Stelle seinen Dank für das Interesse auszusprechen, das er diesen untersuchungen (insbesondere der Übertragung der Resultate auf nicht-reelle H. O.) zugewandt hat, und darauf hinweisen, daß er wiederholt wesentliche Anregungen aus Gesprächen mit ihm empfing. Insbesondere stammt der Begriff der "Hypermaximalität" von H. O. (vgl. Def. 9), sowie die Erkenntnis, daß diese Eigenschaft für die Existenz der Z. d. E. notwendig und hinreichend ist, von E. Schmidt.

[15] Dieselbe wird in der in Anm. 22) angekündigten Arbeit des Verfassers noch bedeutend verschärft werden.

[16] Dies ergibt, zusammen mit einigen Überlegungen von Kap. I, natürlich einen Beweis des Fischer-F. Rieszschen Satzes.

[17] Es kommt im wesentlichen daraut heraus, daß zwei vertauschbare beschränkte H. O. eine gemeinsame Eigenwertform (oder Spektralform) nach Hilbert zulassen. Vgl. Hellinger-Toeplitz, Encyklopädie-Artikel II, C. 13, S. 1562 u. f., wo die Frage für vollstetige H. O. gelöst wird.

[18] Dies ist offenbar eine stetigkeits-ähnliche Eigenschaft, und zwar in jedem "kompakten" topologischen Raume der Stetigkeit gleichwertig. Im Hilbertschen Raume bedeutet sie aber viel weniger, für H.O. ist sie im wesentlichen immer da, vgl. Satz 9.

[19] So weit schwächen wir (mit Rucksicht auf die Anwendung auf Matrizen, vgl. Anhang III) die Bedingung {\(\gamma\)}) von Einleitung V ab: dort wurde Überalldichtheit des Definitionsbereiches verlangt.

[20] Er stammt von Herrn E. Schmidt, vgl. Anm. 23). Bei Beschränkung auf den reellen Hilbertschen Raum tritt die Unterscheidung max. – hypermax. nicht auf.

[21] Für einen H. O. muß jedes (f, Rf) reell sein, da ja (f, B f)=(Rf, f)=(f, Rf) gilt.

[22] Jede Teilmenge einer separablen topologischen Menge ist wieder separabel (siehe z. B. Hausdorff, Einfuhrung in die Mengenlehre, Leipzig-Berlin 1914).

[23] D. h. wennEf sinnvoll ist, so ist es auchE(Ef), und zwar=Ef.

[24] 0, 1 sind zwei überall sinnvolle Operatoren, durch 0f=0, If=f definiert.

[25] Da es sich um überall sinnvolle Operatoren handelt, dürfen wir rubigEF, E{\(\pm\)}F bilden; sonst wären die Definitionsbereiche dieser Operatoren noch genauer zu erörtern.

[26] Dieser Kunstgriff stammt von Herrn E. Schmidt.

[27] Denn wennE Teil vonF ist, so ist 1-F Teil von 1-E, z. B. darum, weil (1-E)(1-F)=1-E-F+EF=1-F ist.

[28] Zunächst wissen wir nur, daß jedes abg. lin. H. O.R genau eine Cayleysche TransformierteU (längentreu) hat. Der Gültigkeitsbereich der Umkehrung wird aus Satz 24 hervorgehen.

[29] Zunächst wissen wir nur, daß jedes abg. lin. H. O.R genau eine Cayleysche TransformierteU (längentreu) hat. Der Gültigkeitsbereich der Umkehrung wird aus Satz 24 hervorgehen.

[30] Denn die -U umfassen die -V, liegen also wie diese überall dicht.

[31] Die wegen der Endlichkeit vonn von selbst abg. ist.

[32] Diese Ausnahme wird sich im folgenden als praktisch erweisen.

[33] Stieljessches Integral, es ist absolut konvergent. Wir schreiben statt {\(\lambda\)}.

[34] Durch =/{\(\pi\)} arc ctg {\(\lambda\)}, {\(\lambda\)}=tg {\(\pi\)} werden die Intervalle 0«1 und <{\(\lambda\)}<eineindeutig aufeinander bezogen. (Beim arc ctg ist immer der Wert >,<0 zu nehmen.)

[35] Es genügt, sich die Definition des Stieltjesschen Integrals zu vergegenwärtigen. Die genannte Ungleichung ist nur eine veränderte Schreibweise der Schwarzschen.

[36] Für '> ist ja (E(Min (, ')) ,g) konstant, also das Integral 0!

[37] Man nehme mitg= das komplex-Konjugierte der letzten Formel.

[38] Der Satz gilt wohl auch noch fürC'=C, es liegt aber kein Beweis dafür vor.

[39] Bei sinnvollenRf 1, ...,Rf k hatten wir dies schon am Anfange des Beweises von Satz 44, aber wir müssen uns von dieser Annahme befreien.

[40] Die Gleichwertigkeit von {\(\alpha\)}) und {\(\gamma\)}) ist der bekannte Satz von Toeplitz, Math. Annalen69 (1911), S. 321.

[41] {\(\pm\)},{\(\cdot\)} sind hier die Zeichen für das Vereinigen, Abziehen und Durchschnitts-Bilden bei Mengen.

[42] Wir nehmen natürlich nur die von endlichem Maße.

[43] Bei Matrizen ist dieses* das Nehmen der konjugiert-transponierten, ebenso bei Integraloperator-Kernen, bei Differentialoperatoren die adjungierte.

[44] Es handelt sich um überall sinnvolle Operatoren, daher sind die +,{\(\cdot\)} ohne weiteres sinnvoll (vgl. Anm. 37)).

[45] WennU unitär ist, so hat es eine InverseU , und es ist (f, U g)=(Uf, UU g)=(Uf, g) =(f, U * g) für allef, g, alsoU =U *. WennU =U * ist, so ist (Uf, Ug)=(f, U * Ug)=(f,g), also fürf=g |Uf|=|f|, so daßU längentreu ist; da es überall Sinn hat und alle Werte annimmt (U hat ja überall Sinn!), ist es unitär.

[46] Vgl. hierzu Einleitung IX und Anm.26).

[47] Sie wird in der in Anm. 22) genannten Arbeit erörtert werden.

