Valiron, G.

Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants. (French) JFM 55.0857.04

Annales École norm. (3) 46, 25-53 (1929).

Verf. behandelt die Differentialgleichung

$$A[y] \equiv y + c_1 y' + c_2 y'' + \cdots + c_n y^{(n)} + \cdots = 0, \tag{1}$$

in der die c_n Konstanten sind, unter der Voraussetzung, daß die "erzeugende Funktion"

$$f(u) = 1 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots \tag{2}$$

eine ganze Funktion von bestimmtem Typus Γ der Ordnung 1 ist.

1. Ist λ eine μ-fache Nullstelle von (2), so ist

$$y = e^{\lambda z} Q(z),$$

wo $Q(z)$ ein beliebiges Polynom von höchstens $(\mu - 1)$-tem Grad sein darf, eine Lösung von (1); Verf. nennt sie eine *Fundamentallösung*. Zunächst zeigt er, daß ganz allgemein das Konvergenzgebiet einer Reihe der Form $\sum e^{\lambda_n z} Q_n(z)$, falls nur

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = 0$$

(μ_n bedeute den Grad von $Q_n(z)$; für $\Gamma = 0$ ist diese Bedingung stets erfüllt), ein konvexes Gebiet ist, das durch die Folge der Zahlen

$$C_n = \operatorname*{Max}_{\nu=0,\ldots,\mu_n} \left| \frac{Q_n^{(\nu)}(0)}{\nu!} \right|$$

festgelegt ist. Im Innern ist die Konvergenz sogar absolut und gleichmäßig. Dieses Ergebnis wird noch etwas erweitert und verschärft.

2. Nach einigen Hilfsbetrachtungen über ganze Funktionen wird unter der Voraussetzung, daß $f(u)$ vom Normaltypus Γ (type moyenne Γ) der Ordnung 1 ist, das Verhalten von $A[g(z)]$ untersucht, wobei $g(z)$ irgendeine holomorphe Funktion bedeutet. Ist $g(z)$ in $|z - z_0| < \Gamma + h$, $h > 0$, regulär, so ist $A[g(z)]$ in $|z - z_0| < h$ regulär. Ist $A[g(z)]$ regulär und überdies $A[g(z)] \equiv 0$, so heißt $g(z)$ eine Lösung von (1). Also folgt: Ist $g(z)$ in der Umgebung eines Punktes z_0 Lösung von (1), so auch in dem mit z_0 zusammenhängenden Teilgebiet seines Holomorphiebereiches $\mathfrak{D}$, dessen Rand vom Rand des Bereiches $\mathfrak{D}$ den Abstand Γ hat; für $\Gamma = 0$, d. h. $f(u)$ vom Minimaltypus der Ordnung 1, also im ganzen Bereich $\mathfrak{D}$. In einem ähnlich konstruierten Teilgebiet, bei dem nur der Abstand Γ durch einen anderen, ebenfalls durch die funktionentheoretischen Eigenschaften von $f(u)$ bedingten Abstand Ω zu ersetzen ist, und das überdies einfach zusammenhängend ist, läßt sich eine Lösung darstellen als Summe einer gleichmäßig konvergenten Reihe, deren Glieder Aggregate von Fundamentallösungen sind. Für einen Kreis um z_0 ergibt sich speziell eine Entwicklung der Form

$$g(z) = \sum e^{\lambda_n z} Q_n(z). \tag{3}$$

Die Berechnung der "*Dirichlet*schen Polynome" $Q_n(z)$ wird durchgeführt; sie sind bei gegebenem $f(u)$ durch die Stelle z_0 und die Lösung $g(z)$ eindeutig bestimmt. Ist $\Gamma = 0$, so gilt die Formel (3) in einem einfach zusammenhängenden Teilgebiet von $\mathfrak{D}$ genau dann, wenn die rechtsstehende Reihe in diesem Teilgebiet absolut konvergiert.

3. Untersuchung des Zusammenhanges, der zwischen den Lösungen von $A[y] \equiv A_1 \cdot A_2[y]$ und den Lösungen von $A_1[y] = 0$ besteht, wenn die erzeugende Funktion von A das Produkt der erzeugenden Funktionen von A_1 und A_2 ist. Z. B. ist eine holomorphe Lösung von $A_1[y] = 0$ auch Lösung von $A[y] = 0$, und ihre

*Dirichlet*schen Polynome sind beide Male dieselben.

4. Besonders werden die “regulären Gleichungen” untersucht; das sind solche, bei denen die Folge der Nullstellen λ_n von $f(u)$ der Bedingung

$$|\lambda_{n+\mu_n}| - |\lambda_n| > \omega \,\mathrm{Max}\,(\mu_n, \mu_{n+\mu_n}) \qquad (\omega \text{ positive Konstante})$$

unterworfen ist. Ist insbesondere $\Gamma = 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_n \log|\lambda_n|}{|\lambda_n|} = 0,$$

so läßt sich jetzt jede Lösung $g(z)$ in eine Reihe, deren Glieder Fundamentallösungen sind, entwickeln, und diese Entwicklung konvergiert im ganzen Existenzbereich von $g(z)$ die Grenze des Konvergenzgebiets ist also singuläre Linie. Ist aber $f(u)$ nur vom Normaltypus, so gelten auch nur schwächere Aussagen.

5. Ferner werden ganze transzendente Lösungen von (1) betrachtet. Ist $f(u)$ vom Normaltypus, so gilt für $M(r) = \mathrm{Max}_{|z|=r} |g(z)|$ die Abschätzung

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} > 0, \quad \text{oder genauer} \quad \varliminf_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{r} > U,$$

wenn $g(z)$ selbst höchstens vom Normaltypus der Ordnung 1 und $f(u)$ in $|u| \leqq U$ nullstellenfrei ist.

6. Den Schluß bilden Bemerkungen über nicht-analytische Lösungen, sowie über den Fall, daß $f(u)$ vom Maximaltypus der Ordnung 1 ist. (IV 4, 7, 10.)

Reviewer: Müller, M., Dr. (Heidelberg)

Full Text: DOI Numdam EuDML