Alexandroff, P.; **Urysohn, P.**

Mémoire sur les espaces topologiques compacts dédié à Monsieur D. Egoroff. (French)

JFM 55.0960.02
Verhandelingen Amsterdam 14, No. 1, 93 S. (1929).

Ausführliche Darstellung der Untersuchungen auf dem Gebiete der abstrakten Topologie, die in den Arbeiten 1. "Zur Theorie der topologischen Räume" von *P. Alexandroff* und *P. Urysohn*, 2. "Struktur der bikompakten topologischen Räume" von *P. Alexandroff*, 3. "Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räume" von *P. Alexandroff* und 4. "Zum Metrisationsproblem" von *P. Urysohn* kurz zusammengefaßt waren (F. d. M. 50, 128; 51, 453). Die Arbeit zerfällt in fünf Kapitel; wie dem Vorwort zu entnehmen ist, rührt ihr Text aus dem Jahre 1923 her; dementsprechend wird die spätere Entwicklung der abstrakten Topologie höchstens nur in einzelnen Fußnoten berücksichtigt. – Unter einem topologischen Raum wird durchweg ein *Hausdorff*scher topologischer Raum verstanden.

Im Kapitel I werden in einleitenden Betrachtungen zunächst die wichtigsten Eigenschaften der topologischen Räume zusammengestellt und durch zahlreiche Beispiele erläutert. Bei dieser Gelegenheit findet man den Beweis des Satzes, daß man in einem topologischen Raume, der ein abzählbares Umgebungssystem besitzt, aus *jedem* Umgebungssystem ein abzählbares Teilsystem wählen kann, welches dem ursprünglichen System gleichwertig ist. Nachdem der Begriff der Regularität eines Raumes eingeführt ist, wird zu den kompakten Räumen übergegangen. Zuerst wird gezeigt, daß die Kompaktheit eines topologischen Raumes jeder der beiden folgenden Eigenschaften äquivalent ist: a) dem *Cantor*schen Durchschnittssatz, b) dem *Heine-Borel*schen Überdeckungssatz *für den Fall abzählbarer* Überdeckungen. Sodann wird der Begriff eines *vollständigen Häufungspunktes* einer unendlichen Menge M eingeführt: Darunter versteht man einen Punkt a von der Eigenschaft, daß jede Umgebung von a eine Teilmenge von M enthält, deren Mächtigkeit derjenigen der ganzen Menge M gleich ist. Als *erster Hauptsatz* wird der Satz bewiesen:

Folgende drei Eigenschaften eines topologischen Raumes R sind untereinander äquivalent:

(A) Jede unendliche Teilmenge von R besitzt mindestens einen vollständigen Häufungspunkt.

(B) Der Durchschnitt einer wohlgeordneten Folge abnehmender nichtleerer abgeschlossener Mengen ist nicht leer.

(C) In jedem System offener Mengen, welche den Raum R bedecken, kann man ein endliches Teilsystem von der gleichen Eigenschaft wählen.

Ein Raum, der eine (folglich alle) der drei Eigenschaften (A), (B), (C) besitzt, heißt *bikompakt.* Nach weiteren Beispielen werden in durch den obigen Äquivalenzsatz nahegelegter Weise die Begriffe der *initial* (bis zu einer gewissen Mächtigkeit) und *final* (von einer gewissen Mächtigkeit an) kompakten Räume eingeführt. Für diese Räume gilt ein Äquivalenzsatz, der dem obigen Satz analog ist. Bei der Formulierung des Äquivalenzsatzes für final kompakte Räume spielen allerdings die *regulären* Kardinalzahlen eine ausgezeichnete Rolle. Die bikompakten Räume sind sowohl initial als auch final kompakt, und zwar bis zu jeder Mächtigkeit (bzw. von der Mächtigkeit $\aleph_0$ an). Von gewöhnlichen kompakten Räumen läßt sich im allgemeinen nur die initiale Kompaktheit bis $\aleph_0$ behaupten. Das zweite Kapitel beginnt mit einer kurzen Diskussion der normalen und der regulären Räume (ein topologischer Raum heißt *normal*, wenn in ihm je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen durch disjunkte offene Mengen trennbar sind; er heißt *regulär*, wenn man in demselben Sinne jede abgeschlossene Menge von jedem in ihr nicht enthaltenen Punkte trennen kann). Es wird bewiesen, daß jeder bikompakte topologische Raum normal ist. Demgegenüber wird ein Beispiel eines irregulären kompakten Raumes konstruiert, andererseits aber bewiesen, daß jeder kompakte Raum mit erstem Abzählbarkeitsaxiom regulär ist.

Ein weiterer Paragraph desselben Kapitels ist den perfekten Teilmengen bikompakter Räume gewidmet. Es wird zunächst gezeigt, daß jede solche Teilmenge eine Mächtigkeit $\geqq \mathfrak{c}$ hat. Ferner werden Fälle untersucht, in denen ein bikompakter Raum keine perfekte Teilmenge enthält. Diese Untersuchung beruht auf dem Begriffe des *Charakters* eines topologischen Raumes R in einem Punkte a: Darunter versteht man die kleinste Kardinalzahl, die als Mächtigkeit eines vollständigen Systems von Umgebungen des Punktes a im Raume R auftritt. Sodann heißt ein Punkt a von R *singulär*, wenn man bei jeder Wahl der Kardinalzahl $\mathfrak{n}$, die kleiner ist als die Mächtigkeit der Menge aller Punkte von R, in jeder Umgebung von

a Punkte finden kann, deren Charakter größer als $\mathfrak{n}$ ist. Es gilt jetzt folgender Satz: *Ein aus unendlich vielen Punkten bestehender bikompakter Raum ohne singuläre Punkte enthält notwendig eine nicht leere perfekte Teilmenge.* Als Korollar folgt: *Ein bikompakter Raum mit erstem Abzählbarkeitsaxiom ist entweder höchstens abzählbar oder von einer Mächtigkeit* $\geqq \mathfrak{c}$.

Der Schluß des Kapitels ist dem Beweise der Äquivalenz einer Reihe punktmengentheoretischer Sätze im Falle bikompakter Räume gewidmet.

Das dritte Kapitel heißt: "Absolut abgeschlossene Räume". Ein topologischer Raum R ist absolut abgeschlossen, wenn er in jedem umfassenden topologischen Raume abgeschlossen ist (oder, was dasselbe ist, wenn man ihm keinen einzelnen nicht isolierten Punkt hinzufügen kann). Im ersten Paragraphen dieses Kapitels werden zwei Kriterien für die absolute Abgeschlossenheit eines topologischen Raumes gegeben. Das zweite dieser Kriterien lautet: R ist dann und nur dann absolut abgeschlossen, wenn man in jedem System offener Mengen, welche R bedecken, ein endliches Teilsystem $G_1, G_2, \dots, G_s$ derart finden kann, daß die abgeschlossenen Hüllen der offenen Mengen $G_1, G_2, \dots, G_s$ den Raum bedecken. Im zweiten Paragraphen wird der Hauptsatz bewiesen: *Die bikompakten Räume sind identisch mit den regulären absolut abgeschlossenen Räumen.*

Im dritten Paragraphen werden vom Standpunkt der Abgeschlossenheitseigenschaften unter gewissen Abzählbarkeits- bzw. Trennbarkeitsvoraussetzungen die kompakten Räume untersucht.

Das vierte Kapitel ist dem systematischen Studium lokaler Eigenschaften bikompakter und kompakter Räume gewidmet. Neben dem schon früher eingeführten *Charakterbegrift* werden jetzt der *Pseudocharakter* und der *Konvergenzcharakter* des Raumes R in einem Punkte a definiert. Der Pseudocharakter ist die kleinste Kardinalzahl, die als Mächtigkeit eines Systems offener Mengen auftritt, deren Durchschnitt der Punkt a ist. Man sagt ferner, daß R in a einen wohlbestimmten *Konvergenz*charakter $\varkappa(a)$ besitzt, falls a ein isolierter Punkt des Raumes R ist (in welchem Fall $\varkappa(a) = 1$ zu setzen ist) oder es gegen den Punkt a konvergierende Mengen des Raumes R gibt; dann ist $\varkappa(a)$ definitionsgemäß die kleinste Kardinalzahl, die als Mächtigkeit einer solchen Menge auftritt. (Eine unendliche Menge M konvergiert gegen den Punkt a, falls die Mächtigkeit von $U(a) \cdot M$ bei jeder Wahl der Umgebung $U(a)$ größer als die Mächtigkeit von $(R - U(a)) \cdot M$ ist.)

In bikompakten Räumen gelten folgende Sätze:

I. Der Charakter stimmt in jedem Raumpunkt mit dem Pseudocharakter überein.

II. Ein bikompakter Raum besitzt in jedem Punkt einen wohldefinierten Konvergenzcharakter, welcher den Charakter in diesem Punkte nicht übertrifft.

Unter den Folgerungen sei hier erwähnt: Der Charakter eines bikompakten Raumes kann in keinem Punkt die Mächtigkeit der Menge aller Raumpunkte übertreffen. An verschiedenen Beispielen wird gezeigt, daß diese Sätze für nicht bikompakte Räume *im allgemeinen* nicht mehr gelten. Sie gelten allerdings für die sogenannten *im Kleinen bikompakten* Räume; dabei heißt R im Punkte a bikompakt, wenn a eine Umgebung besitzt, deren abgeschlossene Hülle (als Raum betrachtet) bikompakt ist; ein Raum, der in jedem seiner Punkte bikompakt ist, heißt im Kleinen bikompakt. In derselben Weise definiert man die im Kleinen kompakten Räume. Von diesen Raumkategorien gilt der Satz:

Im Kleinen bikompakte bzw. kompakte Räume sind mit den topologischen Räumen identisch, die durch Hinzufügung eines einzigen Punktes in bikompakte bzw. kompakte Räume übergehen. Dabei ist im Falle der im Kleinen bikompakten Räume diese Hinzufügung nur auf eine einzige Weise (im Falle der schlechtweg kompakten Räume dagegen im allgemeinen auf mehrere Weisen) möglich.

Das fünfte und letzte Kapitel ist dem Metrisationsproblem für kompakte bzw. im Kleinen kompakte Räume gewidmet. Es beginnt mit einem einleitenden Paragraphen über das zweite Abzählbarkeitsaxiom, in dem eine Reihe von Folgerungen dieses Axioms angegeben wird, von denen jede *im Falle metrisierbarer Räume* dem Axiom selbst äquivalent ist. Dagegen wird an einem Beispiel gezeigt, daß selbst aus der gleichzeitigen Gültigkeit aller dieser Folgerungen in einem topologischen Raum das Axiom noch nicht folgt.

Im zweiten Paragraphen wird bewiesen:

a) Ein topologischer Raum mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom ist dann und nur dann metrisierbar, wenn er normal ist.

b) Ein kompakter topologischer Raum ist dann und nur dann metrisierbar, wenn er dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt.

Im dritten Paragraphen wird der Metrisationssatz für im Kleinen kompakte Räume bewiesen:

Ein im Kleinen kompakter Raum ist dann und nur dann metrisierbar, wenn er entweder dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt oder in ein System (beliebiger Mächtigkeit) von disjunkten offenen Mengen zerfällt, die einzeln dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügen.

Während im Falle kompakter Räume die wesentliche Schwierigkeit des Metrisationssatzes im Beweise der Metrisierbarkeit eines kompakten Raumes mit zweitem Abzählbarkeitsaxiom besteht, liegt im Fall der im Kleinen kompakten Räume der schwierige Punkt im Beweise der Tatsache, daß jeder im Kleinen kompakte metrische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt, in offene Mengen zerfällt, in denen dieses Axiom erfüllt ist. Diese Schwierigkeit wird durch folgenden Hilfssatz überwunden: *Ist in einem metrischen Raum das zweite Abzählbarkeitsaxiom im Kleinen erfüllt, so existiert ein Umgebungssystem, welches dieses Axiom gleichmäßig im Kleinen erfüllt*, und zwar in dem Sinne, daß jeder Punkt des Raumes in höchstens abzählbarvielen Umgebungen des Systems liegt. Sodann kann mau den Metrisationssatz für im Kleinen kompakte Räume auch folgendermaßen formulieren: Ein im Kleinen kompakter Raum ist dann und nur dann metrisierbar, wenn er ein Umgebungssystem besitzt, welches im Kleinen das zweite Abzählbarkeitsaxiom gleichmäßig erfüllt.

In einem Anhang wird ein Satz über transfinite Zahlen bewiesen.

Reviewer: Alexandroff, Prof. P. (Moskau)