Cartan, E.

Sur la détermination d'un système orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos. (French) JFM 55.1029.01

Rendiconti Palermo 53, 217-252 (1929).

E sei ein *geschlossener Riemannscher* Raum, der eine (geschlossene) transitive Gruppe G von Bewegungen in sich zuläßt. Eine "Reihe von Fundamentalfunktionen" nennt Verf. ein System von Funktionen eines in E variablen Punktes, die sich (vermittels der Transformationen einer zu G isomorphen linearen Gruppe Γ) durch die Transformationen von G linear transformieren. Offenbar ist jede solche Reihe von Funktionen durch eine Funktion der Reihe bestimmt; Verf. zeigt, daß alle und nur die irreduziblen Reihen von Fundamentalfunktionen, die durch dieselbe lineare Darstellung Γ von G in sich transformiert werden, erhalten werden können, indem man ausgeht von den linearen Invarianten der Untergruppe γ von Γ, die der "Isotropiegruppe" g in bezug auf den Anfangspunkt O, d. h. der "Stabilitätsuntergruppe" von O in G entspricht. Vermittels rein algebraischer Betrachtungen zeigt Verf., daß die Reihen von Fundamentalfunktionen, die den einzelnen linearen Invarianten der Untergruppen γ, die mit Hilfe aller irreduziblen linearen Darstellungen von G konstruiert werden, entsprechen, *ein Orthogonalsystem in E bilden*; durch elegante Anwendung der Theorie der Integralgleichungen zeigt er, daß ein solches Orthogonalsystem *vollständig* ist. Verf. geht dann zur Untersuchung des Falles über, daß E ein geschlossener *symmetrischer Riemann*scher Raum ist (d. h. daß die Symmetrie bezüglich eines beliebigen Punktes von E eine Isometrie ist). In diesem Falle kann jeder irreduziblen linearen Darstellung von G nur *eine* Reihe von Fundamentalfunktionen entsprechen. Mehr in die Tiefe, bis zur wirklichen Konstruktion aller Reihen von Fundamentalfunktionen, führt Verf. die Untersuchung für die *irreduziblen* geschlossenen symmetrischen Räume, in denen die umfassendste kontinuierliche Gruppe von Bewegungen *einfach* ist. Die vielen interessanten Eigenschaften, die er erhält, sind Verallgemeinerungen von Eigenschaften aus der bekannten Theorie der sphärischen Funktionen von *Laplace*. Diese Theorie entspricht dem Falle, in dem E ein "elliptischer *Hermite*scher" Raum von einer (komplexen) Dimension ist; allgemeiner betrachtet Verf. als Anwendung der Theorie den Fall der elliptischen *Hermite*schen Räume von n Dimensionen (die ausführlich untersucht sind in dem neueren Buch des Verf. "Leçons sur la géométrie projective complexe" (1931; F. d. M. 57), p. 235 u. folg.) und den der einfach zusammenhängenden sphärischen Räume von n Dimensionen.

Reviewer: Enea Bortolotti, Prof. Enea (Florenz)

Full Text: DOI

References:

[1] F. Peter undH. Weyl,Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe [Mathematische Annalen, Bd. 97 (1927), p. 737–755]. Voir aussiH. Weyl,Sur la représentation des groupes continues [L'Enseignement mathématique, t. 26 (1927), p. 226–239]. · Zbl 53.0387.02 · doi:10.1007/BF01447892

[2] Voir par exempleT. Lalesco,Introduction à la théorie des équations intégrales (Paris, Hermann, 1912), p. 64.

[3] Lalesco, loc. cit. 5). p. 69.

[4] E. Cartan, E. Cartan,Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 41 (1913), p. 53–96]. · Zbl 44.0170.02 · doi:10.24033/bsmf.916

[5] Ces espaces ont fait l'objet de deux mémoires fondamentaux:E. Cartan,Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann [Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 54 (1926), p. 214–264 et t. 55 (1927), p. 114–134];Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3e série, t. 44 (1927), p. 345–467].· doi:10.24033/bsmf.1105

[6] l. c. 9),, p. 431.

[7] l. c. 9),, p. 368.

[8] l. c. 9),, p. 426.

[9] , p. 351–356.

[10] l. c. 9),, p. 427.

[11] E. Cartan,Complément au mémoire "Sur la Géométrie des groupes simples{" [Annali di matematica pura ed applicata, 4e série, t. V (1928), p. 253–260].} · Zbl 54.0445.06 · doi:10.1007/BF02415426

[12] l. c. 9),, p. 357.

[13] l. c. 9),, p. 356.

[14] L'espaceE obtenu est l'espace hermitien elliptique; c'est, dans ma classification des espaces symétriques irréductibles clos, l'espace du type (A IV) [l. c.9), p. 466–447].

[15] C'est, avec les notations de mon mémoire déjà cité 8)

[16] Voir à ce sujetH. Weyl,Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen I [Mathematische Zeitschrift, Bd. 23 (1925), p. 271–316], p. 300. · Zbl 51.0319.01 · doi:10.1007/BF01506234

[17] C'est l'espace symétrique irréductible du type (B D II) [l. c. 9), p. 450–451].

[18] l. c. 9), p. 430.

[19] Cfr.E. Cartan,Leçons sur la géoméirie des espaces de Riemann (Paris, Gauthier-Villars, 1928), p. 88.

[20] Cette surface a fait l'objet d'une note récente deO. Bourvka,Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace à quatre dimensions à courbure constante [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 187, (2e semestre 1928), p. 334–336].

[21] Cela tient à ce que tous les espaceE' sont des espaces de recouvrement pour un espace particulierE u, dont de groupe de connexion est fini [l. c. 9), p. 430].