Suschkewitsch, A.
Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. (German)
JFM 54.0151.04
Math. Ann. 99, 30-50 (1928).

Unter einer Gruppe wird hier eine nicht leere Menge $\mathfrak{G}$ von Elementen mit folgenden Eigenschaften verstanden: Jedem geordneten Paar A, B von Elementen aus $\mathfrak{G}$ wird ein Element C aus $\mathfrak{G}$, ihr Produkt, eindeutig zugeordnet:

$$AB = C.$$

Diese Produktbildung ist assoziativ. $\mathfrak{G}$ ist eine endliche Menge.

Erfüllt eine Gruppe $\mathfrak{G}$ das linke bzw. rechte Gesetz: aus

$$BA = CA \quad \text{bzw.} \quad AB = AC$$

folgt stets $B = C$, so heiß t $\mathfrak{G}$ eine Links- bzw. Rechtsgruppe.

Ist speziell $\mathfrak{G}$ sowohl Links- als auch Rechtsgruppe, so ist $\mathfrak{G}$ wegen der Endlichkeit eine Gruppe im gewöhnlichen Sinne.

Ist $\mathfrak{G}$ eine Linksgruppe, so existieren in ihr stets Rechtseinheiten E, die für alle X aus $\mathfrak{G}$ $XE = X$ erfüllen; der Begriff ist dem des Idempotents aus der Theorie der hyperkomplexen Systeme untergeordnet: $E^2 = E$; sind E_i $(i = 1, \dots, n)$ die sämtlichen Rechtseinheiten aus $\mathfrak{G}$, so ist

$$\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^{r} E_i \mathfrak{G},$$

wo die $E_i\mathfrak{G}$ untereinander isomorphe und fremde Gruppen im gewöhnlichen Sinne sind.

Ist aber $\mathfrak{G}$ eine Gruppe schlechthin, so gibt es in $\mathfrak{G}$ eine nicht leere Untergruppe $\mathfrak{K}$, den Kern, mit folgenden Eigenschaften:

$$\mathfrak{K} = \sum_{i=1}^{r} \mathfrak{A}_i = \sum_{i=1}^{s} \mathfrak{B}_i,$$

$$\mathfrak{A}_i = \sum_{j=1}^{s} \mathfrak{C}_{ij},\ \mathfrak{B}_i = \sum_{j=1}^{r} \mathfrak{C}_{ji},$$

wo die $\mathfrak{A}_i$ bzw. $\mathfrak{B}_i$ untereinander isomorphe und fremde Links- bzw. Rechtsgruppen, die $\mathfrak{C}_{kl}$ untereinander isomorphe und fremde Gruppen im gewöhnlichen Sinne sind. Der Typus des Kernes ist völlig bestimmt durch den Typus der $\mathfrak{C}_{kl}$, die Produkttafel der Einheiten E_{kl} von $\mathfrak{C}_{kl}$ und die Zahlen s, r.

Hat man eine Menge von eindeutigen, aber nicht notwendig umkehrbar eindeutigen Abbildungen einer endlichen Menge auf sich, so stellt sie bei geeigneten Vollständigkeitsannahmen eine Gruppe im hier gebrauchten Sinne dar. Es wird gezeigt, daß sich auf diese Weise Gruppen mit vorgegebenem Kerntypus realisieren lassen sogar jede Gruppe kann man erhalten, wenn man den üblichen Gedankengang anwendet, der zum Beweise des *Cayley*schen Satzes führt –, und daß sich die charakteristischen Bestimmungsstücke des Kerns willkürlich vorgeben lassen.

Reviewer: Baer, R., Dr. (Halle, Saale)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Vgl. Maclagan-Wedderburn, On hypercomplex numbers, Proceedings of the London Math. Soc. (2)6 (1908). Ich bin auf diese Arbeit erst nach Fertigstellung der meinigen durch einen freundlichen Hinweis von Frl. E. Noether aufmerksam geworden.

[2] Vgl. z. B. Frobenius, Über endliche Gruppen, Sitzungsber. der Berl. Akad. 1895.

[3] Huntington, Note on the definition of abstract groups and fields my sets of independent postulates. Transact. of the Amer. Math. Soc.6 (1905). · Zbl 36.0191.01

[4] Vgl. Huntington loc. cit.; Note on the definition of abstract groups and fields my sets of independent postulates. Transact. of the Amer. Math. Soc.6 (1905). auch E. H. Moore, A definition of abstract groups. Transact. of the Amer. Math. Soc.3 (1902). Frobenius (Über endliche Gruppen. Sitzungsber. der Berl. Ak. 1895) beweist dasselbe, indem er aber nicht Elemente, sondern Komplexe betrachtet.