Artin, E.; **Hasse, H.**

Die beiden Ergänzungssätze zum Reziprozitätsgesetz der l^n-ten Potenzreste im Körper der l^n-ten Einheitswurzeln. (German) JFM 54.0191.05

Abhandlungen Hamburg 6, 146-162 (1928).

In dieser Arbeit geben die Verf. den Beweis für die beiden Ergänzungsaätze für das l^n-te Potenzrestsymbol im Körper der l^nten Einheitswurzeln ($n \geqq 2$ für $l = 2$) in ganz analoger Form wie in den früheren Arbeiten von *H. Hasse* (J. f. M. 154 (1925), 96-109; F. d. M. 51, 143) und *E. Artin* und *H. Hasse* (J. f. M. 154 (1925), 143-148; F. d. M. 51, 143) für das l-te Potenzrestsymbol, nämlich in der Gestalt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\zeta_n}{\alpha}\right) &= \zeta_n^{\frac{1}{l^n} S_n(\log\alpha)} \quad \text{für } l \neq 2, \\ &= \zeta_n^{(1+2^{n-1})\frac{1}{2^n} S_n(\log\alpha)} \text{ für } l = 2, \\ \left(\frac{\lambda_n}{\alpha}\right) &= \zeta_n^{\frac{1}{l^n} S_n\left(\frac{\zeta_n}{\lambda_n}\log\alpha\right)} \text{ für } \alpha \equiv 1(\lambda_n). \end{aligned}$$

Dabei bedeutet ζ_n eine primitive l^n-te Einheitswurzel, $\lambda_n = 1\zeta_n$

$$\log\alpha = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(1-\alpha)^\nu}{\nu}$$

den Logarithmus von α im l-adischen Sinn, S_n die Spur im Körper k_n.

Der Beweis des ersten Ergänzungssatzes gelingt in verhältnismäßig einfacher Weise.

Ziemlich groß e rechnerische Schwierigkeiten bereitet dagegen der Beweis des zweiten Ergänzungssatzes. Das wesentlichste Hilfsmittel für den Beweis in diesem Fall ist die Konstruktion einer geeigneten multiplikativen Basis, indem an Stelle der bekannten Basis

$$(1) \quad 1-\lambda_n^{\alpha}; \quad 1 \leqq a \leqq l^n,\ (a,l) = 1 \text{ und } a = l^n$$

eine Basis

$$(2) \quad \tau_a;\ 1 \leqq a \leqq l^n,\ (a,l) = 1 \text{ und } a = l^n$$

konstruiert wird, wo die τ_a durch ihre Logarithmen

$$\log\tau_a = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^{al^\nu}}{l^\nu}$$

definiert sind und sich durch die Basiselemente von (1) durch konvergente unendliche l-adische Produkte darstellen lassen, und

$$\tau_a \equiv 1\lambda_n^a(\mod \lambda_n^{a+1})$$

gilt.

Reviewer: Rella, T., Prof. (Graz)

Full Text: DOI