Cartan, H.

Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires et leurs applications. (French) JFM 54.0357.06

Annales Ecole norm. (3) 45, 255-346 (1928).

Das Hauptergebnis der Arbeit ist folgender Satz: Im Einheitskreis sei eine unendliche Menge von Systemen von je p regulären Funktionen ohne Nullstellen gegeben, für die

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_p(z) = 0$$

identisch erfüllt ist. Man kann eine Teilmenge auswählen, die eine der beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

I. Die Nummern $1, \ldots, p$ zerfallen in zwei Sorten derart, daß (1) der Quotient zweier beliebiger Funktionen erster Art konvergiert, (2) der Quotient einer beliebigen Funktion zweiter Art durch eine Funktion erster Art gegen Null konvergiert, (3) als Folge von (2) der Quotient der Summe aller Funktionen erster Art durch eine beliebige derselben gegen Null konvergiert. Es gibt stets mindestens zwei Nummern erster Art. Die Nummern zweiter Art können fehlen.

II. Es gibt zwei Gruppen von Nummern, deren jede mindestens zwei Nummern umfaßt, dazu evtl. einige Nummern, die keiner der beiden Gruppen angehören. In jeder Gruppe kann man wieder zwei Nummernsorten unterscheiden. Für diese gelten wieder die Aussagen (1), (2), (3) wie unter I, nur daß (3) keine Folge von (2) mehr ist.

Besonders eingebend werden die Fälle $p = 3$ und $p = 4$ erörtert. Unter den unmittelbaren Anwendungen sei hervorgehoben das Studium von Familien von Funktionenpaaren, derart, daß alle Funktionen frei von Nullstellen sind, und daß die Summe eines jeden Paares den Wert Eins ausläßt; oder derart, daß die Summe gegen Null konvergiert. In diesem letzteren Falle z. B. kann man eine Teilfolge auswählen, in der entweder die beiden Funktionen f und g des Paares einzeln gegen Null streben, oder $\frac{f}{g}$ gegen -1 konvergiert.

Weiter ergeben sich gewisse Verallgemeinerungen der Sätze von *Schottky* und *Landau*.

Es folgen Anwendungen auf den *Pólya-Nevanlinna*schen Unitätssatz der in der Umgebung von $z = \infty$ meromorphen Funktionen, wobei namentlich die Fälle von 2, 3, 4 Stellensorten diskutiert werden. Die Beweise stützen sich auf einen hier erstmalig bewiesenen Satz von *A. Bloch*. Verf. gibt ihm die folgende präzise Fassung: In der z-Ebene seien n beliebige Stellen $z_1, \ldots, z_n$ gegeben; h sei eine gegebene positive Zahl. Die Stellen z, für die

$$\prod_1^n |z - z_k| \leqq h^n$$

gilt, gehören dem Innern von höchstens n Kreisen an, deren Radiensumme $2eh$ nicht übertrifft. Dieser Satz wird verschiedentlich verallgemeinert und auch auf einige funktionentheoretische Fragen angewendet. Hervorgehoben sei z. B. die folgende Verschärfung eines Satzes von *S. Mandelbrojt*: Es sei $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär und daselbst $|f(z)| < 1$; gegeben seien zwei beliebige positive Zahlen $\varrho < 1$ und γ. Dann gehört dazu eine von f unabhängige positive Zahl A so, daß

$$\frac{\log |f(x)|}{\log |f(y)|} \leqq A$$

für jedes Wertepaar x, y aus $|z| < \varrho$ gilt, ausgenommen die x-Stellen aus gewissen Kreisen der Radiensumme γ.

Besprechung: P. Montel; Bulletin sc. Math. 53 (1929), 44-48.

Reviewer: Bieberbach, L., Prof. (Berlin)

Full Text: DOI Numdam EuDML