Hurewicz, W.

Über unendlich-dimensionale Punktmengen. (German) JFM 54.0620.05

Proceedings Amsterdam 31, 916-922 (1928).

"Bekanntlich sind für jede natürliche Zahl n in der Gesamtheit aller separablen Räume die höchstens n-dimensionalen dadurch charakterisiert, daß sie sich als Summen von $n+1$ nulldimensionalen Teilen darstellen lasssen."

"Diese Tatsache legt den Gedanken nahe, die Theorie der unendlich dimensionalen Mengen mit der Betrachtung jener Räume zu beginnen, die in abzählbar viele nulldimensionale Teile (oder, was dasselbe bedeutet in abzählbar viele endlichdimensionale Teile) zerlegbar sind. Wir wollen solche Raume abzählbardimensional nennen, wobei aus formalen Gründen die leere Menge ebenfalls als abzählbardimensional bezeichnet wird. Ein abzählbar-dimensionaler Raum der keine endliche Dimension besitzt heiß t $\aleph_0$-dimensional."

"Im folgenden soll die Theorie der abzählbar dimensionalen Mengen in ihren Grundzügen entwickelt werden. Dabei beschränken wir unsere Betrachtungen aus schließlich auf metrisierbare separable Räume."

Als erstes zeigt Verf., daß der *Hilbert*sche Raum nicht mit abzählbar vielen endlich dimensionalen Teilen ausgefüllt werden kann, daß dieser Raum also nicht abzählbar dimensional ist.

Um die Ausnahmestellung zu charakterisieren, die die abzählbar-dimensionalen Mengen in bezug auf die übrigen Mengen einnehmen, beweist Verf. zunächst, daß ein separabler Raum abzählbar-dimensional ist, wenn zu jedem seiner Punkte beliebig kleine Umgebungen mit abzählbar-dimensionaler Begrenzung gehören, und führt dann die folgende Begriffsbildung ein: Ein System $\mathfrak{A}$ von separablen Räumen heiß t *komplett* im System $\mathfrak{B}$ aller separablen Raume wenn (1) die leere Menge in $\mathfrak{A}$ vorkommt, und wenn (2) jeder separable Raum zu $\mathfrak{A}$ gehört, der zu jedem seiner Punkte beliebig kleine Umgebungen besitzt, deren Begrenzungen Räume aus $\mathfrak{A}$ sind. Als Hauptsatz ergibt sich alsdann, daß die abzählbar-dimensionalen Raume innerhalb des Bereiches aller *kompakten* Räume den kleinsten kompletten Bereich bilden.

Der oben formulierten Definition der abzählbar-dimensionalen Menge liegt die Auffassung der Dimensionszahl als *Kardinalzahl* zugrunde. Die Verallgemeinerung der üblichen rekursiven Definition der Dimensionszahl führt dazu gewissen unendlich dimensionalen Mengen eine transfinite *Ordinalzahl*, ihre "Ordinaldimension", zuzuordnen. Für eine Ordinalzahl α wird unter einem Raum von der Ordinaldimension α ein Raum verstanden, der keine kleinere Ordinaldimension besitzt und der zu jedem seiner Punkte beliebig kleine Umgebungen enthält, deren Begrenzungen Ordinaldimensionen α haben. Es ergibt sich dann der folgende Satz Einem separablen Raum kommt eine Ordinaldimension dann und nur darin zu, wenn derselbe mit einer Teilmenge eines abzählbar-dimensionalen kompakten Raumes homöomorph ist. Unter den kompakten Räumen stimmen also die mit einer Ordinaldimension versehenen Räume mit den abzählbar-dimensionalen überein. Darin ist u. a. die Aussage enthalten, daß der *Hilbert*sche Raum keine Ordinaldimension besitzt.

Reviewer: Feigl, G., Dr. (Berlin)