Menger, K.
Untersuchungen über allgemeine Metrik. (German) JFM 54.0622.02
Math. Ann. 100, 75-163 (1928).

Die Arbeit besteht aus drei Untersuchungen über die allgemeinen metrischen Räume im Sinne von *Fréchet*, wobei die Metrik als selbständiges Untersuchungsobjekt betrachtet wird, im Gegensatz zur vorherrschenden Tendenz, die allgemeine Metrik nur als Hilfsmittel bei topologischen Untersuchungen aufzufassen.

Die erste Untersuchung bringt eine Theorie der *Konvexität*, mit der folgenden Definition als Ausgangspunkt: Ein Raum heiß t konvex, wenn es zu je zweien seiner Punkte a und b einen dritten Punkt c mit der Eigenschaft:

$$ab = ac + bc$$

(unter ab allgemein den Abstand zwischen den Punkten a, b verstanden) gibt, so daß also für diese drei Punkte der äußerste Fall der "Dreiecksungleichung" vorliegt.

In konvexen vollständigen Räumen kann man zwischen je zwei Punkten a und b *geodätische Bögen* definieren, als abgeschlossene Mengen, welche a und b enthalten und mit der Strecke von der Länge ab kongruent sind. Unter allen einfachen Bögen zwischen a und b sind die geodätischen durch ihre kleinstmögliche Länge charakterisiert. Es folgen einige Aussagen über die Verteilung der metrisch singulären Punkte in konvexen Räumen. Weiter wird dargelegt, wie man durch Spezialisierung der konvexen Räume zu Gebilden gelangt, in denen im Einklang mit elementargeometrischen Axiomen je zwei Punkte eine "Gerade" bestimmen, die ihrerseits durch je zwei auf ihr gelegene Punkte bestimmt wird.

Die zweite Untersuchung beschäftigt sich vorwiegend mit der Frage: Wann ist ein metrischer Raum mit einer Teilmenge des Euklidischen n-dimensionalen Raumes R_n kongruent? Die Lösung gelingt durch Zurückführung der Frage auf Einbettung von Systemen aus endlich-vielen Punkten. Es gilt nämlich: Damit der Raum Re in den R_n metrisch einbettbar sei, ist, falls Re mehr als $n + 3$ Punkte enthält, notwendig und hinreichend, daß jedes System aus je $n + 2$ Punkten von Re in R_n einbettbar sei (für Räume, die aus genau $n + 3$ Punkten bestehen, tritt ein interessanter Ausnahmefall ein), und die Einbettung von $n + 2$ Punkten läß t sich weiter auf die Einbettung von $n + 1$ Punkten zurückführen. Als Endresultat stellt sich heraus: Notwendig und hinreichend für die Einbettbarkeit des aus mehr als $n + 3$ Punkten bestehenden Raumes Re in den Euklidischen R_n ist die Gültigkeit der folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned}
&\text{Für je } n + 2 \text{ Punkte von } \mathrm{Re}\, gilt D(p_1, \dots, p_{n+2}) = 0;\\
&\text{für je} k \text{ Punkte von } \mathrm{Re}\ (k \leqq n + 2) \text{ gilt}:\\
&\operatorname{sgn}\, D\ (p_1, \dots, p_k) = \operatorname{sgn}(-1)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Dabei bedeutet $D(p_1, \dots, p_m)$ die $(n + 1)$-reihige Determinante:

$$\begin{vmatrix}
0 & 1 & 1 & \cdot & 1\\
1 & 0 & (p_1p_2)^2 & \cdot & (p_1p_{n+1})^2\\
1 & (p_2p_1)^2 & 0 & \cdot & (p_2p_{n+1})^2\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
1 & (p_{n+1}p_1)^2 & (p_{n+1}p_2)^2 & \cdot & 0
\end{vmatrix}.$$

Die dritte Untersuchung enthält einen Entwurf für die Theorie der $n$dimensionalen Metrik und ist als Vorstudie zu späteren Untersuchungen gedacht, denen es auch vorbehalten bleibt, eine n-dimensionale Metrik in Übereinstimmung mit den aufgestellten allgemeineren Forderungen tatsächlich einzuführen.

Reviewer: Hurewicz, W., Dr. (Amsterdam)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Vgl Pasch, Vorlesungen ?ber neuere Geometrie, 1. Aufl. 1882, 2. Aufl. bei Springer 1926. Vgl. insbes. ? 1.

[2] Nicht nur die Definition vongestaltlichen Eigenschaften (vgl. meinen Bericht ?ber die Dimensionstheorie, Jahresbericht d. deutsch. Mathem. Ver.35, insbes. S. 119), sondern auch die Definition derelementarsten Beziehungen, welche, wie z. B. die Zwischenbeziehung, dadurch definiert werden, da? sie gewissen Beziehungen noch einfacherer Natur gen?gen, ? auch diese Definitionen sind einin gewissen Ma?e willk?rliches Umgrenzen der zu definierenden Beziehung gegen?ber anderen, welches nur durchAngleichung an den nat?rlichen Sprachgebrauch und gewisseZweckm??igkeitsgr?nde bestimmt wird, und demnach nicht nur formal, sondern auch inhaltlichin verschiedener Weise erfolgen kann. Beispielsweise weicht unser Zwischenbegriff vom elementargeometrischen etwas ab (siehe unten). Wo es sich darum handelt, die beiden auseinanderzuhalten, w?re etwa unser ?zwischen? als ?metrisch zwischen? zu bezeichnen.

[3] Trans. Am. Math. Soc.18 (1917), S. 301.

[4] Unser (vom elementargeometsischen abweichende) Zwischenbegriff ist, wie noch erw?hnt werden m?ge, auch einer Anwendung auf die Erfahrungswelt f?hig. Betrachten wir etwa das Netz der europ?ischen Schnellzugslinien. Es entspricht der Ausdrucksweise von Reisenden, alsAbstand zweier St?dte die (etwa in Stunden gemessene) Dauer der schnellsten Fahrt zwischen den beiden Orten zu bezeichnen. Sehen wir dann ab von den praktisch meist zu vernachl?ssigenden Unterschieden zwischen der Fahrtdauer vonA nachB und der Fahrtdauer vonB nachA, so bilden verm?ge dieser Abstandsdefinition die Stationen offenbar einen die Dreiecksungleichung erf?llenden metrischen Raum. Es entspricht wieder einer gebr?uchlichen Ausdrucksweise, von der StadtB zu sagen, sie liegezwischen den St?dtenA undC, wenn man vonA ohne Umweg viaB nachC gelangen kann, d. i. aber, pr?zis gesprochen, wenn f?r die Abst?ndeAB+BC=AC gilt. Es liegt dann beispielsweise zwischen Wien und Amsterdam sowohl Frankfurt a. M. als auch Leipzig, obwohl Frankfurt weder zwischen Wien und Leipzig noch zwischen Leipzig und Amsterdam und obwohl Leipzig weder zwischen Wien und Frankfurt noch zwischen Frankfurt und Amsterdam liegt. Und es liegt Erfurt zwischen Frankfurt a. M. und Leipzig, also zwischen zwei St?dten, die zwischen Wien und Amsterdam liegen, ohne selbst zwischen Wien und Amsterdam zu liegen, weil eine schnelle Verbindung von Amsterdam und Wien via Erfurt nicht existiert.

[5] Durch die angegebene Konvexit?tsdefinition wird (vgl. Einleitung S. 76) scheinbar zum erstenmal eine spezifisch metrische gestaltliche Eigenschaft metrischer R?ume erfa?t.

Zusatz bei der Korrektur:Allgemeinere diesbez?gliche S?tze habe ich in der Notiz ??ber konvexe H?llen? (Wiener akad. Anz. 1928, Nr. 11) bewiesen.

[6] AlsHyperebene desR n bezeichnen wir einen Teil-R n?1 desR n , also einen linearen Teilruam, dessen Dimension um 1 geringer ist als die des Gesamtraumes.

[7] AlsR 0, als nulldimensionalen euklidischen Raum, bezeichnen wir einen aus einem einzigen Punkt bestehenden Raum.

Zusatz bei der Korrektur:Einen kurzen Beweis eines allgemeineren Theorems gab ich in den ?Bemerkungen zur zweiten Untersuchung ?ber allgemeine Metrik? (Proc. Ac. Amsterdam,30, S. 710).

[8] Vgl. z. B. R. H. Schouten, Mehrdimensionale Geometrie2, (Samml. Schubert36), S. 123.

[9] ?brigens lie?e sich diese Bedingung, obwohl ihre G?ltigkeit f?r euklidische (n+3)-Tupel nicht nur hinreichend, sondern auchnotwendig ist, vermutlich durch eine wesentlich schw?chere Bedingung ersetzen, die bereits hinreichend w?re.

Zusatz bei der Korrektur: Daraus (und ?brigens schon aus den ?berlegungen von S. 131) geht zugleich hervor,da? ein pseudoeuklidisches Punktsystem in keinen euklidischen Raum irgend einer Dimension abstandstreu einbettbar ist.

Zusatz bei der Korrektur: Vgl. ?ber diese und verwandte Probleme meine inzwischen erschienenen Bemerkungen, Proc. Ac. Amsterdam30, S. 710, sowie Wiener akad. Anz. 1928, Nr. 12.