

**Vitali, G.**

**Geometria nello spazio hilbertiano.** (Italian) JFM 54.0762.01

Atti Istituto Veneto 87, 351-428 (1928).

Unter dem “*Hilbertschen Raum*”  $H$  versteht Verf. die Gesamtheit der Funktionen  $f(t)$  einer auf einer meßbaren Menge  $G$  von Punkten einer Geraden gelegenen reellen Veränderlichen mit summablem Quadrat in  $G$ . Verf. hat für diesen Raum  $H$  und für die darin eingebetteten Mannigfaltigkeiten mit endlich vielen Dimensionen (die nichts anderes sind als die *Riemannschen* Mannigfaltigkeiten) viele bemerkenswerte Resultate hergeleitet, von denen er hier eine erste Darstellung gibt (vgl. auch das Buch des Verf. über diesen Gegenstand: “*Geometria nello spazio hilbertiano*”, Bologna, 1929; F. d. M. 55<sub>II</sub>).

Zunächst überträgt Verf. mit Hilfe bekannter Sätze aus der Theorie der summablen Funktionen, der Orthogonalfunktionen und der *Lebesgueschen* Integrale die Haupttatsachen der euklidischen Geometrie auf den Raum  $H$ . Im einzelnen gelten alle Begriffe und Sätze der euklidischen Geometrie, in denen weder die Dimensionenzahl des Raumes noch die Voraussetzung einer endlichen Dimensionenzahl eine wesentliche Rolle spielen, auch in den Räumen  $H$ . Das bildet den Gegenstand der Kapitel I-IV. I: Lineare Räume in einem Raum  $H$ ; Richtungsparameter, Parallelismus, Orthogonalität, Entfernung, Winkel in  $H$ . II: Cartesische Koordinaten in  $H$ . III: Punkte in  $H$ , die Funktionen einer oder mehrerer Variablen sind. IV: Kurven in einem Raum  $H$ ; Hauptgeraden und Krümmungen; die *Frenetschen* Formeln.

Der Kalkül und die Formeln in diesen Kapiteln zeigen eine bemerkenswerte Analogie mit denen der Vektorrechnung in einem euklidischen  $S_n$ ; sie reduzieren sich darauf, wenn die Menge  $G$  endlich ist, d. h. wenn der Raum  $H$  in einen euklidischen  $S_n$  entartet. Es ergeben sich aber auch Sätze und Begriffe, die in der euklidischen Geometrie kein Analogon besitzen. Z. B. haben die Bedingungen dafür, daß eine Transformation in den cartesischen Koordinaten orthogonal sei, ganz verschiedene Form, wenn der Raum ein wirklicher *Hilbertscher* Raum oder ein euklidischer Raum ist, und ferner muß man in  $H$  die sogenannten “*erzeugenden Kurven*” betrachten, die in keinem euklidischen Raum vorkommen.

In den folgenden Kapiteln entwickelt Verf. die projektive und metrische Differentialgeometrie der *Riemannschen* Mannigfaltigkeiten; dabei spielt die Betrachtung des umfassenden *Hilbertschen* Raumes, d. h. die funktionale Darstellung der Punkte, eine untergeordnete Rolle. In Kap. V gibt Verf. einen beachtenswerten Ausdruck für die *Riemannschen* Symbole, ferner die Bedingungen dafür, daß ein 2-Tangential(oder 2-Schmieguungs-)Raum  $\sigma_2$  in einem Punkt einer Mannigfaltigkeit  $V_\nu$  ( $\nu + 1$ )-dimensional sei. In Kap. VI wird gezeigt, wie das Problem, in dem Raum  $\sigma_2$  die zum Tangentialraum  $\sigma_1$  oder in dem 3-Tangential-Raum  $\sigma_3$  die zu  $\sigma_2$  normalen Richtungen zu finden, auf natürliche Weise zur Einführung der gewöhnlichen kovarianten Differentiation (nach *Ricci*) und einer anderen Art der kovarianten Differentiation führt, welche von einer Differentialform zweiter Ordnung vierten Grades  $(d^2f)^2$  abhängt. Das sind zwei Spezialfälle der sehr allgemeinen Operationen aus dem “*verallgemeinerten absoluten Differentialkalkül*” des Verf. (1923, 1927; F. d. M. 49, 555 (JFM 49.0555.\*); 53, 682; vgl. ferner das vorangehende Referat).

Den Gegenstand der drei letzten Kapitel bilden Untersuchungen über invariante Systeme erster Normalen (Normalen zu  $\sigma_1$  in  $\sigma_2$ ) in bezug auf eine  $V_\nu$ , für die  $\sigma_2$   $\frac{\nu(\nu+3)}{2}$  Dimensionen hat; über geodätische Linien; über gewöhnliche Asymptotenlinien und über die “*quasiasymptotischen*” Linien  $\gamma_{2,3}$  von *Bompiani*, deren Gleichung sich für die Flächen mit einem fünfdimensionalen  $\sigma_2$  und einem sechsdimensionalen  $\sigma_3$  mit Hilfe des verallgemeinerten absoluten Differentialkalküls des Verf. in einer sehr einfachen Form schreibt. (IV 3 C, IV 7.)

Reviewer: [Bortolotti, Enea, Prof. \(Cagliari\)](#)

Cited in 1 Document