Vitali, G.

Geometria nello spazio hilbertiano. (Italian) JFM 54.0762.01

Atti Istituto Veneto 87, 351-428 (1928).

Unter dem "*Hilbert*schen Raum" H versteht Verf. die Gesamtheit der Funktionen $f(t)$ einer auf einer meßbaren Menge G von Punkten einer Geraden gelegenen reellen Veränderlichen mit summablem Quadrat in G. Verf. hat für diesen Raum H und für die darin eingebetteten Mannigfaltigkeiten mit endlich vielen Dimensionen (die nichts anderes sind als die *Riemann*schen Mannigfaltigkeiten) viele bemerkenswerte Resultate hergeleitet, von denen er hier eine erste Darstellung gibt (vgl. auch das Buch des Verf. über diesen Gegenstand: "Geometria nello spazio hilbertiano", Bologna, 1929; F. d. M. 55_{II}).

Zunächst überträgt Verf. mit Hilfe bekannter Sätze aus der Theorie der summablen Funktionen, der Orthogonalfunktionen und der *Lebesgue*schen Integrale die Haupttatsachen der euklidischen Geometrie auf den Raum H. Im einzelnen gelten alle Begriffe und Sätze der euklidischen Geometrie, in denen weder die Dimensionenzahl des Raumes noch die Voraussetzung einer endlichen Dimensionenzahl eine wesentliche Rolle spielen, auch in den Räumen H. Das bildet den Gegenstand der Kapitel I-IV. 1: Lineare Räume in einem Raum II; Richtungsparameter, Parallelismus, Orthogonalität, Entfernung, Winkel in H. II: Cartesische Koordinaten in H. III: Punkte in H, die Funktionen einer oder mehrerer Variablen sind. IV: Kurven in einem Raum H; Hauptgeraden und Krümmungen; die *Frenet*schen Formeln.

Der Kalkül und die Formeln in diesen Kapiteln zeigen eine bemerkenswerte Analogie mit denen der Vektorrechnung in einem euklidischen S_n; sie reduzieren sich darauf, wenn die Menge G endlich ist, d. h. wenn der Raum H in einen euklidischen S_n entartet. Es ergeben sich aber auch Sätze und Begriffe, die in der euklidischen Geometrie kein Analogon besitzen. Z. B. haben die Bedingungen dafür, daß eine Transformation in den cartesischen Koordinaten orthogonal sei, ganz verschiedene Form, wenn der Raum ein wirklicher *Hilbert*scher Raum oder ein euklidischer Raum ist, und ferner muß man in H die sogenannten "erzeugenden Kurven" betrachten, die in keinem euklidischen Raum vorkommen.

In den folgenden Kapiteln entwickelt Verf. die projektive und metrische Differentialgeometrie der *Riemann*schen Mannigfaltigkeiten; dabei spielt die Betrachtung des umfassenden *Hubert*schen Raumes, d. h. die funktionale Darstellung der Punkte, eine untergeordnete Rolle. In Kap. V gibt Verf. einen beachtenswerten Ausdruck für die *Riemann*schen Symbole, ferner die Bedingungen dafür, daß ein 2-Tangential(oder 2-Schmiegungs-)Raum σ_2 in einem Punkt einer Mannigfaltigkeit V_ν $(v+1)$-dimensional sei. In Kap. VI wird gezeigt, wie das Problem, in dem Raum σ_2 die zum Tangentialraum σ_1 oder in dem 3-Tangential-Raum σ_3 die zu σ_2 normalen Richtungen zu finden, auf natürliche Weise zur Einführung der gewöhnlichen kovarianten Differentiation (nach *Ricci*) und einer anderen Art der kovarianten Differentiation führt, welche von einer Differentialform zweiter Ordnung vierten Grades $(d^2f)^2$ abhängt. Das sind zwei Spezialfälle der sehr allgemeinen Operationen aus dem "verallgemeinerten absoluten Differentialkalkül" des Verf. (1923, 1927; F. d. M. 49, 555 (JFM 49.0555.*); 53, 682; vgl. ferner das vorangehende Referat).

Den Gegenstand der drei letzten Kapitel bilden Untersuchungen über invariante Systeme erster Normalen (Normalen zu σ_1 in σ_2) in bezug auf eine V_ν, für die σ_2 $\frac{\nu(\nu+3)}{2}$ Dimensionen hat; über geodätische Linien; über gewöhnliche Asymptotenlinien und über die "quasiasymptotischen" Linien $\gamma_{2,3}$ von *Bompiani*, deren Gleichung sich für die Flächen mit einem fünfdimensionalen σ_2 und einem sechsdimensionalen σ_3 mit Hilfe des verallgemeinerten absoluten Differentialkalküls des Verf. in einer sehr einfachen Form schreibt. (IV 3 C, IV 7.)

Reviewer: Bortolotti, Enea, Prof. (Cagliari)