Artin, E.
Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen. (German) JFM 53.0114.03
Abhandlungen Hamburg 5, 251-260 (1927).

Die Theorie der hyperkomplexen Größen (vgl. z. B. J. H. Maclagan Wedderburn, Proceedings L. M. S. (2) 6 (1908), 77-118; F. d. M. 33, 139 (JFM 33.0139.*)) ist bisher unter der Voraussetzung entwickelt worden, daß das betrachtete System $\mathfrak{S}$ von endlicher Ordnung über einem Grundkörper sei. Die Theorie gilt aber noch unter wesentlich allgemeineren Voraussetzungen, was sich z. B. bei der Behandlung der Zahlentheorie der hyperkomplexen Größen als nützlich erweist.

$\mathfrak{S}$ sei ein assoziativer Ring (d. h. ein System von Elementen, für das eine kommutative, assoziative, eindeutig umkehrbare Addition sowie eine assoziative und beiderseits distributive Multiplikation definiert ist). Unter einem Rechtsideal versteht man eine Teilmenge von $\mathfrak{S}$, die 1) mit je zwei Größen auch stets ihre Differenz, 2) mit α auch stets $\alpha \cdot \lambda$ für alle λ aus $\mathfrak{S}$ enthält. Es wird dann (nach dem Vorbild von E. Noether, vgl. etwa Math. Ann. 96 (1926), 26-61; F. d. M. 52) gefordert, daß die beiden Kettensätze in $\mathfrak{S}$ gelten: 1. Hat man eine unendliche Folge von Rechtsidealen, bei der jedes Rechtsideal das folgende enthält, so stimmen von einer Stelle an alle Rechtsideale der Folge überein. 2. Das Gleiche gilt für alle Folgen von Rechtsidealen, bei der jedes Rechtsideal in dem folgenden enthalten ist. – Unter diesen Voraussetzungen kann man die ganze Theorie entwickeln. Analog wie Rechtsideale kann man die Linksideale definieren; $\mathfrak{a}$ heißt ein Ideal, wenn es Rechts- und Linksideal ist (in alter Bezeichnung invariantes Teilsystem). Summe und Produkt von Rechtsidealen lassen sich in der üblichen Weise definieren. Elemente und ebenso Rechtsideale von $\mathfrak{S}$ heißen nilpotent, wenn eine Potenz verschwindet. $\mathfrak{S}$ heißt halbeinfach, wenn es außer dem Nullideal kein nilpotentes Ideal enthält; enthält es außer dem Nullideal und $\mathfrak{S}$ überhaupt kein Ideal, so heißt $\mathfrak{S}$ einfach.

Dann wird u. a. gezeigt: In jedem $\mathfrak{S}$ gibt es ein nilpotentes Ideal $\mathfrak{m}$, daß alle nilpotenten Rechts- und Linksideale umfaßt; im halbeinfachen Fall ist $\mathfrak{m} = 0$. In jedem nicht nilpotenten Rechtsideal gibt es mindestens ein Element e, für das $e^2 = e$ ist (idempotentes Element). Ist $\mathfrak{S}$ halbeinfach und $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal in $\mathfrak{S}$, so besitzt $\mathfrak{a}$ eine Haupteinheit e, für die $ex = xe = x$ für alle x aus $\mathfrak{a}$ ist; es ist $a = e\mathfrak{S}$. Jedes halbeinfache System läßt sich eindeutig als direkte Summe einfacher Systeme darstellen.

Ein Ring $\mathfrak{S}$ mit Haupteinheit e heißt primär, wenn jedes von $\mathfrak{S}$ verschiedene Ideal nilpotent ist; $\mathfrak{S}$ heißt vollständig primär, wenn sogar jedes von $\mathfrak{S}$ verschiedene Rechtsideal nilpotent ist. Notwendig und hinreichend für das letztere ist, daß e das einzige idempotente Element in $\mathfrak{S}$ ist. Ein primärer Ring $\mathfrak{S}$ läßt sich als direktes Produkt eines eindeutig bestimmten vollständig primären Ringes Ξ mit einem System von Matrizeneinheiten e_{ik}, $(i, k = 1, 2, \dots, n)$ darstellen; dabei ist $e_{ik}e_{rs} = 0$ für $k \neq r$, $e_{ik}e_{ks} = e_{is}$. Die Zahl n ist durch $\mathfrak{S}$ ebenfalls eindeutig bestimmt. $\mathfrak{S}$ und Ξ haben das gleiche Zentrum. Je zwei verschiedene Zerlegungen von der genannten Art lassen sich durch einen inneren Automorphismus von $\mathfrak{S}$ ineinander überführen. Dieser letzte Satz war auch unter den gewöhnlichen Voraussetzungen vorher nicht bekannt. Ist $\mathfrak{S}$ einfach, so besitzt Ξ keinen Nullteiler.

Das Gesagte bleibt auch richtig, wenn man von $\mathfrak{S}$ noch fordert, daß es R-Modul in bezug auf einen kommutativ verbundenen Ring R sei, und dementsprechend bei der Definition der verschiedenen Arten von Idealen noch fordert, daß sie ebenfalls R-Moduln seien. (Siehe auch Abschn. II, Kap. 7.)

Reviewer: Brauer, R., Dr. (Königsberg i. Pr.)

Full Text: DOI

References:

[1] Vgl. etwaJ. H. Maclagan Wedderburn, On hypercomplex numbers, Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. 6, S. 77–118.L.E. Dickson Algebras and their Arithmetics. Chicago 1923.

[2] Den Orundgedanken dieses Beweises verdanke ich Herrn B. L. van der Waerden.