Szegö, G.; **Walfisz, A.**

Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern. I, II. (German)

JFM 53.0153.02
Math. Z. 26, 138-156, 467-486 (1927).

Für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper K vom Grade k sei $\zeta_K(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion, und es sei

$$Z(s) = \zeta_K^m(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F(\nu)}{\nu^s}.$$

Die summatorische Funktion

$$H(x) = \sum_{\nu \leqq x} T(\nu)$$

ist dann asymptotisch gleich der Residuensumme $R(x)$ von $Z(s)\dfrac{x^s}{s}$ in $s = 0$ und $s = 1$. Das Problem der Bestimmung der Größenordnung von $P(x) = H(x) - R(x)$ enthält viele jetzt klassische Probleme der analytischen Zahlentheorie als Spezialfall und wird als Piltzsches Teilerproblem im Körper K bezeichnet. Die vorliegenden beiden Abhandlungen sind Beiträge zum Ω-Problem für $P(x)$. Die erste Abhandlung enthält die direkte Anwendung einer Methode, welche von Szegö stammt und von diesem auf das "Kreis-Kugelproblem" angewendet worden ist [Math. Z. 25, 388–404 (1926; JFM 52.0175.03)]. Es wird der Ausdruck ($\xi > 0$)

$$\frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-u} u^n P\left(\xi u^{\frac{1}{2}mk}\right) du$$

asymptotisch ausgewertet; hieraus läßt sich dann mit Hilfe eines Satzes über Diophantische Approximationen ein Ω-Resultat für $P(x)$ ableiten. Die zweite Abhandlung enthält wesentlich bessere Resultate, welche erhalten werden durch Anwendung eines Verfahrens, welches Littlewood zum Nachweis von

$$\pi(x) = Li(x) + \Omega\left(\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}\right)$$

für die Primzahlfunktion $\pi(x)$ geführt hat. Das Hauptresultat der zweiten Abhandlung ist (die Resultate von I sind in denen von II enthalten):

Für $mk = 3$, $mr_1 = 1$ ($r_1 =$ Anzahl der reellen unter den Konj. v. K), oder für $mk \geqq 4$ ist

$$P(x) = \frac{\Omega_R}{\Omega_L}\left((x\log x)^{\frac{mk-1}{2mk}} (\log\log x)^{m-1}\right).$$

Überdies können die Verf. in diesen Fällen sogar einen Ω_R-Ω_L-*Intervall* - Satz beweisen.

Reviewer: Kloosterman, H. D., Dr. (Leiden)

MSC:

11R47 Other analytic theory
11N37 Asymptotic results on arithmetic functions

Keywords:

Piltz divisor problem; algebraic number fields

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] E. Landau, ?ber die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen (Vierte Abhandlung) [G?ttinger Nachrichten 1924, S.

137-150]. · Zbl 50.0115.01

[2] F?r das Piltzsche Teilerproblem vgl. G. H. Hardy, On Dirichlet's divisor problem [Proceedings of the London Mathematical Society (2)15 (1916), S. 1-25]; f?r die Idealfunktion eines imagin?r-quadratischen K?rpers: G. H. Hardy, On the expression of a number as the sum of two squares [Quarterly Journal46 (1915), S. 263-283]; f?r die Idealfunktion eines beliebigen Zahlk?rpers: A. Walfisz, ?ber die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Inauguraldissertation [G?ttingen: W. Fr. Kaestner, 1922], Satz I.

[3] Vgl. die erste in der vorigen Fu?note angegebene Abhandlung, S. 23-25, wo eine Beweisskizze f?r (1) gegeben wird; die Absch?tzung (2) kann auf analoge Weise abgeleitet werden.

[4] G. Szeg?, Beitr?ge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. I.: Entwicklungss?tz? [Math. Zeitschr.25 (1926), S. 87-115]; Beitr?ge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II.: Zahlentheoretische Anwendungen [Math. Zeitschr.25 (1926), S. 388-404]. Diese beiden Arbeiten zitieren wir kurz mit Szeg?, I und Szeg?, II. · Zbl 52.0280.04 · doi:10.1007/BF01283827

[5] Vgl. Szeg?, ? S. 94, (6).

[6] A. Walfisz, ?ber das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlk?rpern [Math. Zeitschr.22 (1925), S. 153-188], S. 153, (1. 5). Wir zitieren diese Arbeit kurz mit Walfisz, P.T. · Zbl 51.0153.02 · doi:10.1007/BF01479601