Maier, W.
Potenzreihen irrationalen Grenzwertes. (German) JFM 53.0340.02
J. f. M. 156, 93-148 (1927).

Die vom Verf. untersuchten Funktionen sind Spezial- bzw. Grenzfälle der Potenzreinen von der Form

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu x^\nu$$

mit

$$b_\nu = \prod_{\varrho=1}^{\nu} \frac{(\varrho-\varkappa_1)(\varrho-\varkappa_2)}{(\varrho-\varkappa_3)(\varrho-\varkappa_4)(\varrho-\varkappa_5)},$$

wo $\varkappa_1, \dots, \varkappa_5$ Konstanten sind. Es sei $q = \frac{\sigma}{\tau}$ eine von Null verschiedene rationale Zahl (σ ganz, τ positiv ganz). Die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit lauten folgendermaßen:

1. Der Integrallogarithmus

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{\nu!\,\nu}$$

ist irrational.

2. Bezeichnet J die Zylinderfunktion erster Art, so ist

$$q^{-k}\{J_k(2\sqrt{-q})\}^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{(\nu+k)!^2}\binom{2\nu+2k}{\nu} \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

entweder Null oder irrational.

3. Die Funktion

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{\nu^2}$$

ist irrational, wenn σ und τ die Bedingung

$$256\, e^2\, |\,\sigma\,|^3 < \tau$$

erfüllen.

4. Der Grenzfall der hypergeometrischen Reihe

$$\xi = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu q^\nu \text{ mit } b_\nu^{-1} = \prod_{\varrho=1}^{\nu}\left(\varrho+\frac{\gamma}{c}\right)\left(\varrho+\frac{\delta}{d}\right)$$

ist irrational, wenn c, d, γ, δ ganz, cd positiv ist, wenn ferner $\frac{\gamma}{c}$ und $\frac{\delta}{d}$ keine negativen ganzen Zahlen sind, wenn schließlich

$$\text{entweder} \quad \xi \neq 0 \quad \text{oder} \quad cd = 1$$

gilt.

5. Die hypergeometrische Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu q^\nu \quad \text{mit} \quad b_\nu = \prod_{\varrho=1}^{\nu} \frac{\varrho+\frac{\alpha}{a}}{\varrho+\frac{\gamma}{c}}$$

ist rational für $\frac{\alpha}{a}-\frac{\gamma}{c} = 0,1,2,\dots$ und irrational sonst, wenn a, c, α, γ ganz, $ac \neq 0$, $\frac{\gamma}{c} \neq -1,-2,\dots$ und

$$\frac{\sigma}{2} + 2a^2c^4\sigma^2 < \tau$$

gilt.

Ein ähnlich lautender Satz wird für

$$b_\nu = \prod_{\varrho=1}^{\nu} \frac{\left(\varrho + \frac{\alpha}{a}\right)\left(\varrho + \frac{\beta}{b}\right)}{\left(\varrho + \frac{\gamma}{c}\right)\varrho}$$

bewiesen.

Schließlich wird gezeigt, daß gewisse Werte der Zylinderfunktion

$$J_0(2\sqrt{-x}) = \xi(x)$$

keinem quadratischen Zahlkörper angehören können. Es gilt genauer:

Sind A_0, A_1, A_2 ganz, A_0 von Null verschieden, ferner q_1 und q_2 von Null verschiedene rationale Zahlen, so ist

$$A_0 + A_1\xi(q_1) + A_2\xi^2(q_2) \neq 0.$$

"Inhaltlich lehnt sich diese Untersuchung an Hermite an; methodisch ist sie beeinflußt durch Hurwitz und Herrn Hilbert."

Reviewer: Szegö, G., Prof. (Königsberg i. Pr.)

Full Text: DOI Crelle EuDML