Peter, F.; **Weyl, H.**

Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe. (German) JFM 53.0387.02

Math. Ann. 97, 737-755 (1927).

Die Arbeit des einen Verf. über die halbeinfachen Gruppen [Math. Z. 23, 271–309 (1925); 24, 328–395 (1925; JFM 51.0319.01), IV, 8] lieferte u. a. das klassische Resultat ihrer Darstellbarkeit durch geschlossene lineare Gruppen. Dort erwähnte Verf. bereits, daß man sämtliche Darstellungen der vorgelegten Gruppe statt mit den algebraischen Mitteln Cartans auch unter Benutzung der Geschlossenheit und der Orthogonalitätsrelationen gewinnen kann.

Der Begriff "sämtliche Darstellungen" ist dabei jedoch in dem Sinne einzuschränken, daß nur diejenigen Darstellungen behandelt werden, für die die Orthogonalitätsrelationen gelten.

Die Geschlossenheit gewährleistet die Invarianz eines Volumenelements gegenüber Rechts- und Linkstranslationen und die vollständige Reduzierbarkeit reduzibler Darstellungen, so daß man sich nur um die irreduziblen Darstellungen zu kümmern braucht.

Das Entsprechende zur regulären Darstellung der diskontinuierlichen Gruppen wäre hier die Gruppe unendlicher Matrizen, die sich ergibt, wenn man auf ein auf der Gruppenmannigfaltigkeit vollständiges Orthogonalsystem (Verwendung des invarianten Volumelements) die Transformationen der Gruppe anwendet. Um aber die Zerfällung dieser Darstellung durchzuführen, legen Verf. ein spezielles Orthogonalsystem zugrunde, die Eigenfunktionen eines Hermiteschen Kernes $z(st^{-1}) = K(s,t)$, die sie nach der Schmidtschen Methode gewinnen. Die endlich vielen Eigenfunktionen, die zum gleichen Eigenwert gehören, kombinieren bei Anwendung der Gruppe miteinander. So erhält man Darstellungen durch Gruppen endlicher unitärer Matrizen, die man im allgemeinen noch weiter reduzieren muß.

Als Eigenfunktionensystem des vorgelegten Kernes kann man aber auch unmittelbar die Koeffizienten der gewonnenen Darstellungen verwenden. Andererseits sind die Koeffizienten sämtlicher Darstellungen Eigenfunktionen irgendeines Kernes der betrachteten Art, evtl. auch mit dem reziproken Eigenwert Null. Die Behauptung, daß man aus einem solchen Kern bei Anwendung obiger Methode sämtliche Darstellungen erhalten kann, die in ihm enthalten sind, fällt mit der Vollständigkeitsrelation für das Orthogonalsystem aller Darstellungskoeffizienten zusammen. Ähnliches gilt für die einfachen Charaktere, die die Vollständigkeitsrelation gleichfalls befriedigen, jedoch nur bei ausschließlicher Verwendung von Klassenfunktionen.

Um in Wirklichkeit die sämtlichen Darstellungen zu gewinnen, kann man nicht die Eigenfunktionen sämtlicher Kerne der betrachteten Art aufstellen. Je weniger aber der durch einen Kern definierte Integraloperator von der Identität abweicht, desto "mehr" Darstellungen treten in ihm mit nicht verschwindenden Koeffizienten auf; durch Approximation der Identität kann man alle Darstellungen erhalten.

Die Approximations- und Entwicklungssätze, die die Verf. zum Schluß bringen, führen gleichfalls zu gruppentheoretischen Folgerungen; sie zeigen nämlich, daß die Gesamtheit der Darstellungen eines Elementes bzw. der Charaktere einer Klasse das Element, bzw. die Klasse vollständig bestimmen.

Schließlich verweisen die Verf. auf die Methode des einen von ihnen zur Behandlung der fastperiodischen Funktionen, die zwar kein Spezialfall der hier geschilderten Methode ist, weil es sich dort um eine wesentlich offene Gruppe handelt, aber mit der hiesigen Methode eng verwandt ist (Sitzungsberichte Akad. Berlin 1926, 211-214; F. d. M. 52).

Es sei noch bemerkt, daß das Verfahren der Verf. nicht notwendig sämtliche Infinitesimal- und Keimdarstellungen liefert, sondern nur die, die fortgesetzt die Gruppenmannigfaltigkeit nur endlich oft überdecken. (Siehe auch Abschn. II, Kap. 5.)

Reviewer: Freudenthal, H., Dr. (Amsterdam)

MSC:

22Exx Lie groups

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Sitzungsber. Berl. Akad. 1905, S. 406; 1924, S. 199. Vgl. auch Weyl, Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen I, II, III, Math. Zeitschr.23, S. 271;24, S. 328, 377, 789 (1925, im folgenden zitiert als W. I, II, III): I, S. 296.

[2] F?r ganz beliebige Gruppen wurde diese Unabh?ngigkeit bewiesen von G. Frobenius und I. Schur, Sitzungsber. Berl. Akad. 1906, S. 215, nach einer Methode, die Burnside f?r die Komponenten einer einzigen irreduziblen Darstellung zum gleichen Ziel gef?hrt hatte.

[3] Das Programm des Beweises samt dem Resultat wurde schon ausgesprochen in W. III, S. 390.

[4] Diese Iteration ist etwas ausf?hrlicher entwickelt in Math. Annalen97, S. 345.

[5] Hier ist namentlich Frobenius zu nennen mit seinen grundlegenden Arbeiten in den Sitzungsber. Berl. Akad. von 1896 an. Ferner I. Schur, Neue Begr?ndung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsber. Berl. Akad. 1905, S. 406, und Burnside, der seine Methoden und Ergebnisse zusammenfa?te in dem Buch ?Theory of groups of finite order? (2nd ed., Cambridge 1911).

[6] Vgl. dar?ber W. I?III, woselbst die primitiven Charakteristiken der halbeinfachen Gruppen in explizit-algebraischer Form berechnet wurden.