Cartan, E.

Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. I, II. (French) JFM 53.0390.01

Bulletin S. M. F. 54, 214-264 (1926); 55, 114-134 (1926,1927).

In einer früheren Arbeit (Proceedings Amsterdam 29 (1926), 11-13; F. d. M. 52) hat Verf. gemeinsam mit J. A. Schouten die Riemannschen Maßbestimmungen festgestellt, die in jeder Richtung Translationen längs geodätischer Linien zulassen. Die Parallelverschiebung läßt in diesen Räumen die Krümmung, die zu einem zweidimensionalen Element gehört, also auch den Krümmungstensor invariant. In der vorliegenden Arbeit stellt Verf. alle Räume $\mathfrak{E}$ mit dieser letzten Eigenschaft auf. Das geschieht auf einem gruppentheoretischen Wege, der vielfach dem der erstgenannten Arbeit ähnelt. Entsprechend der größeren Allgemeinheit der Fragestellung ist der Weg umständlicher; die Ergebnisse sind um so schöner.

Die von Harry Levy (Rendiconti Accad. d. L. Roma (6) 3 (1926), 65-69; F. d. M. 52) über dieselbe Fragestellung angestellten Überlegungen sind unrichtig; die Note Cartans in demselben Bande (544-547) umreißt den Gedankengang der vorliegenden Arbeit.

Die gruppentheoretischen Erörterungen der Arbeit beziehen sich auf die Holonomiegruppe, d. h. die Gruppe der (im wesentlichen) orthogonalen Transformationen, die der Vektorkörper eines Punktes bei Parallelverschiebungen längs zusammenziehbarer Kurven erleidet, und auf die Bewegungsgruppe (groupe des déplacements), d. h. die kontinuierliche Gruppe der Punkttransformationen, die die Maßbestimmung ungeändert lassen; schließlich auf die Isotropiegruppe (die im allgemeinen gemischt ist), deren Transformationen einen Punkt und die Maßbestimmung fest lassen. Die Holonomiegruppen aller Punkte sind einander ähnlich, desgleichen die Isotropiegruppen.

Es genügt, sich auf reell irreduzible Räume zu beschränken ($ds^2 = \sum g_{ik} dx^i dx^k + \sum h_{\varrho\sigma} dy^\varrho dy^\sigma$ bedeutet Reduzibilität). Notwendig und hinreichend für die Irreduzibilität der Maßbestimmung ist die der Holonomiegruppe. Verf. stellt ein Pfaffsches System auf, das das ds^2, den Krümmungstensor und die infinitesimalen Transformationen der Holonomiegruppe miteinander verknüpft, und gewinnt daraus Bedingungen dafür, daß gegebene Holonomiegruppen und Krümmungstensoren zu einem Raum $\mathfrak{E}$ gehören. Das Pfaffsche System läßt erkennen, daß ein Raum $\mathfrak{E}$ eine transitive Bewegungsgruppe zuläßt. Auch die geodätische Spiegelung an einem festen Punkt verändert das ds^2 nicht; diese Eigenschaft kommt sogar nur den Räumen $\mathfrak{E}$ zu.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen des 1. Kap. werden im 2. Kap. die Räume $\mathfrak{E}$ mit Hilfe der Holonomiegruppe untersucht. Als das wahre Werkzeug erweist sich aber später im 3. Kap. die Bewegungsgruppe. Mit der Realität, Orthogonalität und Irreduzibilität der Holonomiegruppe kann man die Untersuchungen schon sehr weit treiben. Die Gruppe darf keine komplexe Ebene invariant lassen, deren Dimension von $n/2$ verschieden ist, denn mit einer solchen ließe sich auch die konjugierte, also auch den reellen Schnitt beider invariant. Die etwaigen $n/2$-dimensionalen Ebenen müssen total isotrop sein. Stellt man dieselben Überlegungen bei der adjungierten Gruppe an, deren invariante Ebenen ja invarianten Untergruppen der Holonomiegruppe entsprechen, so fällt auch die letzte Möglichkeit weg, und es ergibt sich, daß eine reell einfache, orthogonale, irreduzible Gruppe auch komplex einfach ist. Der für beliebige irreduzible Gruppen geltende Satz von der Zerfällbarkeit in direkte einfache Faktoren kann hier also auch im Sinne reeller Zerfällung ausgesprochen werden. Holonomiegruppen mit invarianten komplexen Ebenen sind durch das Auftreten eines einparametrigen Faktors charakterisiert.

Unter Benutzung der oben erwähnten Beziehungen stellt Verf. nun (mit einigen Ausnahmen) alle möglichen Krümmungstensoren auf. Unter anderem ergibt sich, daß in einem Raum $\mathfrak{E}$ die Krümmung, die zu einem zweidimensionalen Element gehört, ihr Vorzeichen nicht wechselt.

Unabhängig davon findet man die Tatsache, daß die kontinuierliche Isotropiegruppe (so, wie sie die Vektoren transformiert) in der Holonomiegruppe enthalten ist. Eine nicht in der Holonomiegruppe liegende infinitesimale Transformation, die den Krümmungstensor unverändert ließe, müßte nämlich die Holonomiegruppe invariant lassen; dieser einparametrige Faktor würde die Invarianz einer komplexen Ebene nach sich ziehen, die aber schon der Holonomiegruppe zukäme; diese invariante Ebene würde einen einparametrigen Faktor der Holonomiegruppe erfordern; eine irreduzible Gruppe kann aber als halbeinfache Gruppe oder als Produkt einer halbeinfachen und einer einparametrigen keine zwei einparametrigen Faktoren enthalten.

Ein weiteres Ergebnis: aus der Invarianz des Krümmungstensors gegenüber Parallelverschiebungen folgt die der quadratischen Form mit den Komponenten des einmal verjüngten Krümmungstensors als Komponenten. Diese muß wegen der Irreduzibilität dem ds^2 proportional sein. Daraus folgt die Konstanz der Totalkrümmung, die dasselbe Vorzeichen wie die Krümmung haben muß.

Ein Spezialfall der Räume $\mathfrak{E}$ sind die Darstellungsräume einfacher Gruppen (siehe das vorangehende Referat). Man erhält sie durch Mittelbildung über die von den beiden Parametergruppen erzeugten Parallelismen. Ihre Holonomiegruppe fällt mit der adjungierten der vorgelegten Gruppe zusammen. Die invariante quadratische Form $\varphi(e) = \sum c^{\varrho}_{i\sigma} c^{\sigma}_{k\varrho} e^i e^k$ ist im unitären Fall definit. Der zugehörige Raum $\mathfrak{E}$ hat positive Krümmung. Umgekehrt ist jeder Raum $\mathfrak{E}$ mit positiver Krümmung und einfacher Holonomiegruppe Darstellungsraum dieser Gruppe.

Die überraschendsten und elegantesten Ergebnisse bringt die Untersuchung der Räume $\mathfrak{E}$ mittels der Bewegungsgruppe. Die der Darstellungsräume einfacher Gruppen ist unitär und halbeinfach; die der entsprechenden Räume mit negativer Krümmung ist der zugehörigen komplexen Gruppe isomorph. Sonst ist die Bewegungsgruppe aber stets einfach; dieser Fall wird im folgenden untersucht. Die Bewegungsgruppe läßt sich aufbauen aus den infinitesimalen Transformationen Y der Isotropiegruppe und Transformationen X, deren dreifache Klammerausdrücke die Y nicht enthalten. Die X erzeugen im Darstellungsraum der Bewegungsgruppe eine total geodätische Mannigfaltigkeit (siehe vorangehendes Referat). Diese Mannigfaltigkeit ist nun im wesentlichen wieder der Raum $\mathfrak{E}$. (In einer späteren Arbeit (F. d. M. 53, 393 (JFM 53.0393.*)-394) wird gezeigt, daß man, von beliebigen einfachen Gruppen ausgehend, so stets Räume $\mathfrak{E}$ mit einfacher Bewegungsgruppe erhält.) Wendet man das Konstruktionsverfahren nur auf unitäre Bewegungsgruppen an, so erhält man nur die Räume $\mathfrak{E}$ positiver Krümmung. Die zugehörigen Räume negativer Krümmung ergeben sich durch Übergang zu einer komplex isomorphen Gruppe. Dieser Übergang kann stets durch $X' = iX$, $Y' = Y$ vollzogen werden, und wie man ihn auch vollzieht, man gelangt stets zur gleichen Holonomiegruppe. Dies wird durch Betrachtung der einzelnen Gruppentypen bewiesen. Zum Schluß wird erwähnt, daß die projektive Gruppe von $\mathfrak{E}$ (von einem Ausnahmefall abgesehen) mit der Bewegungsgruppe identisch ist. Daß der Raum $\mathfrak{E}$ als geodätische Mannigfaltigkeit im Darstellungsraum aufgefaßt werden kann, findet sich analog in der vorstehend referierten Arbeit des Verf.

Verf. hat diese Untersuchungen in Annali di Mat. (4) 4 (1927), 209-256 (F. d. M. 53, 392) und in Annales Ecole norm. (3) 44 (1927), 345-467 (F. d. M. 53, 393 (JFM 53.0393.*)) fortgesetzt.

Reviewer: Freudenthal, H., Dr. (Amsterdam)

Full Text: DOI EuDML