Artin, Emil; Schreier, Otto

The algebraic construction of real fields. (Algebraische Konstruktion reeller Körper.) (German) JFM 52.0120.05

Abhandlungen Hamburg 5, 85-99 (1926).

Die vorliegende Arbeit bringt eine abstrakte Charakterisierung der reellen Körper, die es ermöglicht, die reelle Algebra in begrifflich sehr einfacher Weise in die abstrakte Theorie der algebraischen Körper einzuordnen. Kennzeichnend für einen reellen Zahlkörper ist es, daß in ihm eine Summe von Quadraten dann und nur dann verschwindet, wenn jeder Summand Null ist. Demgemäß heißt ein abstrakter Körper *reell*, wenn in ihm -1 nicht als Quadratsumme darstellbar ist. Ein reeller Körper hat stets die Charakteristik 0. Nennt man einen Körper *geordnet*, wenn für jedes Element a eine und nur eine der Beziehungen $a = 0$, $a > 0$, $-a > 0$ besteht, und wenn dabei mit $a > 0$ und $b > 0$ auch $a + b > 0$ und $ab > 0$ gilt, so ist, wie man leicht sieht, jeder geordnete Körper reell.

Ein Körper P heißt *reell abgeschlossen*, wenn P, aber keine algebraische Erweiterung von P, reell ist. Ist γ ein Element aus P, das in P kein Quadrat ist, so zeigt eine Quadratsummendarstellung von -1 in $P(\sqrt{\gamma})$, daß γ auch nicht Quadratsumme in P sein kann, daß dagegen $-\gamma$ in P Quadratsumme ist und daher auch Quadrat sein muß. Von den beiden Elementen γ und $-\gamma$ ist also eines und offenbar nur eines Quadrat. Man erhält nun eine – und zwar die einzig mögliche – Ordnung von P durch die Festsetzung: positiv (> 0) sind alle und nur die von Null verschiedenen Elemente von P, deren Quadratwurzel in P liegt. Jeder reell abgeschlossene Körper kann also auf eine und nur eine Weise geordnet werden (Satz 1).

Ein indirekter Beweis führt durch einen Induktionsschluß nach dem Grad des Polynoms zu dem Ergebnis: In P besitzt jedes Polynom ungeraden Grades wenigstens eine Nullstelle (Satz 2). Die Gleichung $x^2+1 = 0$ ist in P nicht lösbar. Also: ein reell abgeschlossener Körper ist nicht algebraisch abgeschlossen; er wird dagegen algebraisch abgeschlossen durch Adjunktion einer Nullstelle i von $x^2+1 = 0$ (Satz 3). Denn wenn in einem geordneten Körper K Satz 2 gilt und aus jeder positiven Zahl die Quadratwurzel ausgezogen werden kann, führen die Schlüsse des zweiten *Gauß*schen Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra zum Beweis der algebraischen Abgeschlossenheit von $K(i)$. Eine von *E. Artin* schon früher angewendete Schlußweise [Hamb. Math. Abh. 3, 319–323 (1924; JFM 50.0104.01)] ergibt dann: Jeder Unterkörper P eines algebraisch abgeschlossenen Körpers Ω von der Charakteristik 0, aus dem Ω durch eine einfache Erweiterung hervorgeht, ist reell abgeschlossen (Satz 4). Da im reell abgeschlossenen Körper P jedes Polynom $f(x)$ in irreduzible lineare und quadratische Faktoren zerfällt, gilt ferner: Wenn für zwei Elemente a, b aus P $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ wird, so gibt es zwischen a und b wenigstens ein Element c in P, für das $f(c) = 0$ wird (Satz 5). Dieser Satz bildet die Grundlage für die üblichen Beweise der Sätze der reellen Algebra. In einem reell abgeschlossenen Körper gelten also die Sätze der reellen Algebra, z. B. der Satz von *Rolle*, der *Sturm*sche Satz usw. (Satz 6).

Durch einen Wohlordnungsschluß wird der Existenzsatz bewiesen: Ist K reell, Ω algebraisch abgeschlossen über K, so gibt es wenigstens einen reell abgeschlossenen Körper P zwischen K und Ω, so daß $\Omega = K(i)$ (Satz 7). Eine unmittelbare Folgerung daraus ist, daß jeder reelle Körper geordnet werden kann. Wählt man in Satz 7 speziell Ω algebraisch über K, so ist auch P algebraisch über K. Genauer gilt: Zu einem geordneten Körper K gibt es eine und – bis auf äquivalente Erweiterungen - nur eine algebraische reell abgeschlossene Erweiterung P, deren Ordnung eine Fortsetzung der Ordnung von K ist; in P ist der identische Automorphismus der einzige, der K elementweise fest läßt (Satz 8). Das ergibt sich so: Bildet man den ebenfalls reellen Körper $\overline{K}$, der aus K durch Adjunktion der Quadratwurzeln aller positiven Elemente ven K entsteht, und zu $\overline{K}$ eine algebraische reell abgeschlossene Erweiterung P, so sind die positiven Elemente von K in P Quadrate, also auch positiv. Ist P^* eine zweite algebraische reell abgeschlossene Erweiterung von K, die die Ordnung von K fortsetzt, so führt die Tatsache, daß der *Sturm*sche Satz schon in K eine Entscheidung über die Anzahl der in P bzw. P^* gelegenen Nullstellen eines jeden Polynoms mit Koeffizienten aus K liefert, zur Konstruktion einer die Ordnung erhaltenden Abbildung von P auf P^*, die sich als Isomorphismus erweist.

Die anfangs definierte Ordnung eines Körpers braucht nicht archimedisch zu sein. Ist G eine geordnete Erweiterung von K, so ist ein in bezug auf K maximal-archimedischer Unterkörper A von K dadurch definiert, daß A keine in bezug auf K unendlich großen Elemente, d. h. keine Elemente von G, die dem

Betrage nach größer sind als jedes Element von K, enthält, während in jeder in G gelegenen Erweiterung von A in bezug auf K unendlich große Elemente liegen sollen. Die Existenz eines in bezug auf K maximal-archimedischen Körpers A beweist man unter Benutzung einer Wohlordnung der Elemente von G. Ist insbesondere $G = P$ reell abgeschlossen über K, so gehört jedes in bezug auf A algebraische Element von A zu A; A ist daher reell abgeschlossen. Ferner ist A isomorph dem Restklassenkörper Γ/u des Ringes Γ derjenigen Elemente von P, die in bezug auf K nicht unendlich groß sind, nach dem Primideal u, das aus 0 und den in bezug auf K unendlich kleinen Elementen von P (d. h. deren Betrag kleiner ist als jedes positive Element von K) besteht. Wenn also P reell abgeschlossen über K ist, so sind alle in bezug auf K maximal-archimedischen Unterkörper von P reell abgeschlossene und äquivalente Erweiterungen von K (Satz 9).

Ist K Quotientenkörper eines geordneten Ringes R, so gibt es eine und nur eine Ordnung von K, die in R mit der gegebenen übereinstimmt; man erhält sie durch die Festsetzung: $\frac{b}{c} > 0$ $(c \neq 0)$ dann und nur dann, wenn $bc > 0$. Da der Ring der ganzen rationalen Zahlen nur auf eine Weise geordnet werden kann, gibt es nach Satz 8 einen und bis auf Isomorphie nur einen reell abgeschlossenen absolut algebraischen Körper, den Körper der (im gewöhnlichen Sinn) reellen algebraischen Zahlen. Allgemeiner: Jeder Anordnung eines reellen absolut algebraischen Körpers K entspricht umkehrbar eindeutig eine isomorphe Abbildung von K auf einen (im gewöhnlichen Sinn) reellen Zahlkörper; dann und nur dann führen verschiedene Anordnungen von K auf denselben (im gewöhnlichen Sinn) reellen Zahlkörper, wenn sie durch einen Automorphismus von K ineinander übergehen (Satz 10). – Ist Ω ein transzendenter algebraisch abgeschlossener Körper von der Charakteristik 0, so gibt es zwischen dem Primkörper und Ω zwei nicht isomorphe reell abgeschlossene Körper P_1 und P_2, für die $P_1(i) = P_2(i) = \Omega$; ist der Transzendenzgrad von Ω höchstens gleich der Mächtigkeit des Kontinuums, so kann man beide archimedisch in bezug auf den Primkörper bestimmen (Satz 11).

Die Ergebnisse der Arbeit finden Anwendung in der Arbeit von *Artin* über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate (vgl. das folgende Referat).

Reviewer: Pannwitz, Erica, Dr. (Berlin)

MSC:

12D15 Fields related with sums of squares (formally real fields, Pythagorean fields, etc.)

12J15 Ordered fields

Full Text: DOI

References:

[1] Crelle, Bd. 137 (1910), S. 167-309.

[2] E. Artin, Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zahlen. Hamb. Abh. Bd. 3 (1924), S. 319-323. · Zbl 50.0104.01

[3] E. Artin, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate. · Zbl 52.0122.01

[4] Wir haben die kurze Bezeichnung 'reell abgeschlossen' der prätziseren 'reellalgebraisch abgeschlossen' vorgezogen.

[5] i bedeutet hier und im folgenden stets eine Nullstelle vonx 2+1.

[6] Dies ist möglich, weilf(x) doppelwurzelfrei sein sollte.

[7] Diese Voraussetzung ist entbehrlich, worauf wir noch zurückkommen.

[8] Aus a (u) folgta-b in u, d. h. entweder O oder in bezug aufK unendlich klein, alsoa =b, wenna undb zuK gehören.

[9] 'Reell' im gewönlichen Sinn ist hier und im folgenden durch Frakturbuchstaben hervorgehoben.

[10] Dieser Satz ist bereits a. a. O.2) bewiesen, allerdings nicht rein algebraisch.

[11] Sogar unendlich viele.

[12] 'Geordnet' ist hier im Sinne der allgemeinen Mengenlehre, nicht im Sinne der Ordnung eines Körpers gemeint.