Noether, Emmy

Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl und Funktionenkörpern. (German)

JFM 52.0130.01
Math. Ann. 96, 26-61 (1926).

Die Zerlegungssätze der Idealtheorie in kommutativen Ringen, die dem Satz von der eindeutigen Zerlegung einer ganzen Zahl in Primzahlpotenzfaktoren entsprechen, sind von der Verf. in der Arbeit "Idealtheorie in Ringbereichen" (1921; F. d. M. 48, 121 (JFM 48.0121.*)) untersucht worden. Diese Fragestellung wird hier von einem anderen Standpunkt aus wieder aufgenommen: Es handelt sich um die axiomatische Charakterisierung derjenigen kommutativen Ringe, in denen der Satz von der eindeutigen Darstellung eines vom Nullideal verschiedenen Ideals als Produkt von Primidealpotenzen gilt. Übrigens ist diese Arbeit insofern von der früheren unabhängig, als die Grundbegriffe und Hilfsmittel in der Arbeit selbst entwickelt werden.

Das Axiomensystem für kommutative Ringe der genannten Art lautet:

I. Gültigkeit des Teilerkettensatzes: Jede Kette von Idealen, in der jedes Ideal echter Teiler des vorhergehenden ist, bricht im Endlichen ab.

II. Gültigkeit des Vielfachenkettensatzes modulo jedes vom Nullideal verschiedenen Ideals: Jede Kette von Idealen, in der jedes Ideal echtes Vielfaches des vorangehenden ist und alle Ideale Teiler eines festen vom Nullideal verschiedenen Ideals sind, bricht im Endlichen ab.

III. Existenz eines Einheitselements der Multiplikation.

IV. Nichtexistenz von Nullteilern.

V. Ganze Abgeschlossenheit des Ringes in seinem Quotientenkörper.

I und II zusammen – dabei II ohne Beschränkung auf vom Nullideal verschiedene Ideale – werden als Doppelkettensatz bezeichnet.

Zunächst wird – im Anschluß an *Dedekind* – für einen Ring $\mathfrak{T}$ ohne Nullteiler und mit Einheitselement (Axiom III und IV) die Theorie der ganzen Größen in Bezug auf einen Unterring $\mathfrak{R}$ entwickelt (§ 1). Unter Voraussetzung des Teilerkettensatzes für $\mathfrak{R}$ (Axiom I) und der ganzen Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{T}$ ergibt sich schließlich die *Dedekind*sche Folgerung I: Zu jedem nicht-ganzen Element β aus $\mathfrak{T}$ und $c \neq 0$ aus $\mathfrak{R}$ gibt es einen Exponenten $\sigma \geqq 0$ derart, daß $c\beta^\varrho$ ganz für $0 \leqq \varrho \leqq \sigma$, dagegen nicht ganz für $\varrho > \sigma$. Unter denselben Voraussetzungen gilt, wenn man $\mathfrak{T}$ zum Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$ spezialisiert (Axiom V), die *Dedekind*sche Folgerung II: Jedes nichtganze Element β aus $\mathfrak{T}$ läßt sich als Quotient $\frac{m}{n}$ zweier Elemente aus $\mathfrak{R}$ darstellen derart, daß $\frac{m^2}{n}$ ebenfalls nichtganz ist.

In § 2 wird nachgewiesen, daß sich die Kettensätze (Axiom I und II, das letzte mit oder ohne Beschränkung auf vom Nullideal verschiedene Ideale) von den Idealen eines Ringes $\mathfrak{R}$ mit Einheitselement sinngemäß auf die Untermoduln eines endlichen Modulbereiches in bezug auf $\mathfrak{R}$ übertragen. Daraus folgt weiter (§ 3): In $\mathfrak{R}$ seien die Axiome I, III–V erfüllt; $\mathfrak{R}$ sei der Quotientenkörper von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$ eine endliche Erweiterung erster Art von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{S}$ das System der in bezug auf $\mathfrak{R}$ ganzen Größen aus $\mathfrak{L}$. Dann gelten in $\mathfrak{S}$ dieselben Axiome, und in jeder Ordnung aus $\mathfrak{S}$ gelten die Axiome I, III, IV. Ist in $\mathfrak{R}$ außerdem Axiom II erfüllt, so gilt es auch in $\mathfrak{S}$ und in jeder Ordnung aus $\mathfrak{S}$. Dies Ergebnis führt zum Nachweis der Gültigkeit des Axiomensystems in Zahl- und Funktionenkörpern.

In § 4 werden formale Hilfsmittel entwickelt: Zwei Isomorphiesätze für Moduln und entsprechend auch für Ringe in Analogie zu den gruppentheoretischen Isomorphiesätzen; ferner – unter Voraussetzung der Existenz des Einheitselements – die Grundregeln für das Rechnen mit teilerfremden Idealen und im Anschluß daran der Zusammenhang zwischen einer Darstellung des Ringes als direkte Summe von Idealen und einer Darstellung des Nullideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches paarweise teilerfremder Ideale.

§ 5 bringt – ohne einschränkende Voraussetzung über $\mathfrak{R}$ - den Begriff des schwachen und des starken Primideals (der Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ soll keine Nullteiler bzw. keine Nullteilerideale enthalten), des schwachen und des starken Primärideals (im Restklassenring $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ soll eine Potenz jedes Nullteilers bzw. jedes Nullteilerideals Null werden) und des zugehörigen Primideals. Die Unterscheidung zwischen schwachen und starken Primidealen ist nur formal; dagegen kann es schwache Primärideale geben, die nicht starke Primärideale sind, und diese beiden Begriffe fallen erst bei Voraussetzung des Teilerkettensatzes zusammen. Auch ohne Teilerkettensatz kann man schließen: Das kleinste gemeinsame Vielfache endlich vieler zu demselben Primideal gehöriger Primärideale ist jedenfalls schwach primär mit demselben zugehörigen Primideal. Eine kürzeste Darstellung (in der also kein Ideal weggelassen werden darf) als kleinstes gemeinsames Vielfaches endlich vieler zu verschiedenen Primidealen gehöriger schwacher bzw. starker Primärideale ist kein schwaches bzw. starkes Primärideal. Schließlich wird der Begriff des Modul- und des Idealquotienten sowie der des zu einem ändern primen Ideals eingeführt ($\mathfrak{b}$ heißt prim zu $\mathfrak{a}$, wenn $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, d. h. wenn aus $\mathfrak{d}\mathfrak{b} \equiv 0(\mathfrak{a})$ stets $\mathfrak{d} \equiv 0(\mathfrak{a})$ folgt).

Setzt man in $\mathfrak{R}$ Gültigkeit des Teilerkettensatzes voraus (Axiom I), so gilt (§ 6): Jedes Ideal ist als kleinstes gemeinsames Vielfaches endlich vieler irreduzibler Ideale (die also ihrerseits nicht als kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier echter Teiler dargestellt werden können) darstellbar. (Dieser Satz hat rein mengentheoretischen Charakter und wird unter Benutzung einer Wohlordnung der Elemente von $\mathfrak{R}$ bewiesen.) Jedes irreduzible Ideal ist primär. Die Darstellung durch irreduzible Ideale ist also zugleich eine Darstellung durch Primärideale, und Zusammenfassung der zum gleichen Primideal gehörigen Primärideale ergibt: Jedes Ideal läßt eine kürzeste Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen zu verschiedenen Primidealen gehörigen (also größten) Primärkomponenten zu. (Die Beweisführung dieses Satzes ist gegenüber der in der genannten Arbeit gegebenen vereinfacht und von der Benutzung der Existenz des Einheitselements befreit.)

§ 7 handelt von der Idealtheorie unter Voraussetzung des Doppelkettensatzes. Wenn in einem kommutativen Ring ohne Nullteiler der Vielfachenkettensatz gilt, so ist er ein Körper. Anwendung auf den Restklassenring nach einem Primideal liefert: Wenn in einem kommutativen Ring $\mathfrak{R}$ der Vielfachenkettensatz gilt, besitzt ein Primideal keinen echten Teiler außer dem Einheitsideal $\mathfrak{o}$. (Bei Voraussetzung von Axiom II ist hier wie in den folgenden Sätzen das Nullideal auszunehmen.) Daraus ergibt sich weiter, wenn man den Teilerkettensatz hinzunimmt, daß in der kürzesten Darstellung eines Ideals als kleinstes gemeinsames Vielfaches größter Primärkomponenten diejenigen Primärkomponenten, die nicht zu $\mathfrak{o}$ gehören, eindeutig bestimmt sind. Verlangt man noch Existenz des Einheitselements, so wird jedes zu $\mathfrak{o}$ gehörige Primärideal gleich $\mathfrak{o}$; die kürzeste Darstellung als kleinstes gemeinsames Vielfaches von Primärkomponenten ist also eindeutig und – wegen der Teilerfremdheit der zugehörigen Primideale – zugleich eine Produktdarstellung. Daraus folgt noch, daß die Begriffe relativ prim und teilerfremd zusammenfallen.

Nimmt man zu den Axiomen I–IV Axiom V hinzu (§ 8), so werden die vom Nullideal verschiedenen Primärideale die Potenzen der zugehörigen Primideale. Das wird zuerst für die zum Exponenten 2 gehörigen Primärideale (die also genau in der zweiten Potenz des zugehörigen Primideals aufgehen) auf Grund der *Dedekind*schen Folgerung II und daraus ohne nochmaliges Zurückgreifen auf die Axiome allgemein bewiesen. Damit ist aus der kürzesten Darstellung eines Ideals durch Primärkomponenten eine Produktdarstellung durch Primidealpotenzen geworden,

In § 10 wird umgekehrt die Gültigkeit des Axiomensystems aus der Existenz einer eindeutigen Darstellung jedes nicht vom Nullelement oder (evtl. vorhandenen) Einheitselement abgeleiteten Ideals als Produkt von Primidealen geschlossen; dabei wird die scharfe Eindeutigkeitsforderung $\mathfrak{a}^\varrho \neq \mathfrak{a}^{\varrho+1}$ gestellt; Primideale sind alle und nur die (nicht vom Einheitselement abgeleiteten) Ideale, die keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen echten Teiler haben. Die Axiome I–IV ergeben sich leicht aus diesen Voraussetzungen. Zum Nachweis der ganzen Abgeschlossenheit im Quotientenkörper braucht man die Tatsache, daß jedes Ideal durch Multiplikation mit einem zu einem gegebenen Ideal teilerfremden Ideal in ein Hauptideal übergeführt werden kann, sowie die Theorie der gebrochenen Ideale, aus der folgt, daß jedes nicht zu $\mathfrak{R}$ gehörige Element des Quotientenkörpers sich so als Quotient zweier Elemente aus $\mathfrak{R}$ darstellen läßt, daß keine Potenz des Zählers durch den Nenner teilbar wird. – Die Axiome I–IV zusammen mit der Forderung, daß jedes Primärideal irreduzibel sei, haben die ganze Abgeschlossenheit im Quotientenkörper zur Folge, während bei Existenz von Nullteilern aus I–III und der gleichen Forderung nicht die ganze Abgeschlossenheit im Quotientenring folgt.

Schließlich wird noch gezeigt (§ 10), daß allgemein in Modulbereichen die Gültigkeit des Doppelkettensatzes gleichwertig ist mit der Existenz einer Kompositionsreihe. Zum Nachweis der Existenz der Kompositionsreihe auf Grund des Doppelkettensatzes wird Wohlordnung der Elemente des Moduls vorausgesetzt; der Beweis der Umkehrung geschieht durch Induktion nach der Länge der Kompositionsreihe und liefert zugleich einen Beweis des *Jordan-Hölder*schen Satzes.

Reviewer: Pannwitz, Erica, Dr. (Berlin)

Full Text: DOI EuDML