Carleman, T.

Les fonctions quasi analytiques. Leçons professées au Collège de France. (French)

JFM 52.0255.02
Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Paris: Gauthier-Villars. 115 p. (1926).

Es handelt sich um quasianalytische Funktionen einer reellen Variablen. Eine Familie von unendlich oft differenzierbaren Funktionen eines Intervalles (a, b) heißt quasianalytisch, wenn zwei Funktionen der Familie identisch sind, sobald in einem Punkt ihre sämtlichen Ableitungen übereinstimmen. Verschiedene Fragestellungen der partiellen Differentialgleichungen legen es nahe, sich auf Funktionen zu beschränken, deren Ableitungen Ungleichungen der Form

$$|f^{(n)}(x)| < K^n A_n$$

genügen. Dabei sind die A_n positive Konstanten, die für alle Funktionen der Familie fest sind, während K eine von $f(x)$ abhängige Konstante bedeutet. Die Theorie befaßt sich dann hauptsächlich mit den folgenden beiden Fragen:

1. Welches sind die notwendigen und hinreichenden Eigenschaften der A_n, wenn die Familie quasianalytisch sein soll?

2. Wie kann man eine quasianalytische Funktion aus ihren Ableitungen in einem Punkt berechnen?

Nach Darstellung der älteren Sätze von Denjoy und Borel entwickelt der Verf. die Theorie der asymptotischen Reihen. Diese setzt ihn in Stand, die erste Frage wie folgt zu beantworten: Die notwendige und hinreichende Bedingung besteht darin, daß

$$\int_0^\infty \log\left(\sum_0^\infty \frac{r^{2n}}{A_n^2}\right) \frac{dr}{r^2}$$

divergiert; oder was dasselbe ist, daß die kleinste nicht wachsende Majorante der Reihe

$$\sum \frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}$$

divergiert.

Kap. 7 bringt die Lösung der zweiten Frage. Sie besteht in folgendem: Man setze $A_n = a_n^n$. Dann kann man eine Folge von Zahlen $A_n^* = (a_n^*)^n$ finden, die gleichfalls eine quasianalytische Familie bilden, und für die $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_n^*} = 0$ ist. Dann setze man $b_n = \dfrac{1}{(a_n^*)^{2^n}}$ und bezeichne mit

$$f_k(x) = \sum_0^{k-1} c_n \omega_{k,n}(x)$$

die Funktion, welche

$$\sum_0^k b_n \int_0^1 \left[f^{(n)}(x)\right]^2 dx$$

zum Minimum macht. Dann ist

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_0^{k-1} \omega_{k,n}(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

die Lösung des zweiten Problems.

Es wird noch die Frage beantwortet, wann die $f^{(n)}(0)$ einer quasianalytischen Funktion angehören.

Kap. 8 entwickelt die Zusammenhänge mit den Kettenbrüchen und dem Momentenproblem von Stieltjes. Es ergeben sich so neue Beweise der Sätze von Denjoy und Borel. Ferner ergibt sich der folgende Satz:

Dafür, daß die unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \quad \text{mit } |a_n| < A\alpha_n,$$

durch die Werte $f^{(2p)}_{(0)}$ bestimmt ist, ist notwendig und hinreichend, daß das Momentenproblem

$$\int_0^\infty x^k \, d\psi(x) = \sum_1^\infty a_n^2 n^{2k}$$

bestimmt ist.

Kap. 9 gilt den Reihen $\sum \frac{A_n}{z - a_n}$ und den quasianalytischen Funktionen einer komplexen Variablen. Der Verf. zeigt, daß es für den quasianalytischen Charakter hinreicht, daß

$$\sum \frac{\log\log\left|\frac{1}{A_n}\right|}{\log\left|\frac{1}{A_n}\right|}$$

konvergiert. (IV 4.)

Besprechungen: A. Denjoy, Bull. Sci. Math. (2) 50, 361–365; A. Buhl, Enseignement 25, 309–310; M. O., Revue des questions scient. (4) 10, 496–497; R. Tambs Lyche, Norsk. Mat. Tidsskrift 8, 102-104.

Reviewer: Bieberbach, L., Prof. (Berlin)

MSC:

30-02	Research exposition (monographs, survey articles) pertaining to functions of a complex variable	Cited in **9** Reviews Cited in **158** Documents