Weyl, H.

Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen. (German) JFM 52.0260.02

Math. Ann. 97, 338-356 (1926).

Die *Fourier*exponenten einer stetigen fastperiodischen Funktion $f(t)$ sind als die Werte λ_ν erklärt, für die der Mittelwert

$$M(f(t)e^{-i\lambda t}) = \alpha(\lambda) \tag{1}$$

von Null verschieden ausfällt. $\alpha(\lambda_\nu)$ sind dann die *Fourier*koeffizienten. Verf. geht nun von dem Gedanken aus, daß, wenn man in (1) t durch $s-t$ ersetzt, die Größen $\dfrac{1}{\alpha(\lambda_\nu)}$ als "Eigenwerte" und die einfachen Schwingungen $e^{i\lambda_\nu s}$ als "Eigenfunktionen" der linearen Integralgleichung

$$M^t(f(s-t)e^{i\lambda t}) = \alpha(\lambda)e^{i\lambda s} \tag{2}$$

mit dem "Kern" $f(s-t)$ auftreten, wobei anstelle des Integrals die Mittelbildung zu nehmen ist. Um nun die Existenz von abzählbar vielen Eigenwerten und die Vollständigkeitsrelation nachzuweisen, wird die Theorie der Integralgleichungen mit symmetrischem Kern von *E. Schmidt* auf die entsprechende Mittelgleichung für einen fastperiodischen beliebigen Kern übertragen, was gelingt, da mit den Mittelwerten dieselben Rechenoperationen wie mit Integralen ausgeführt werden können. Nachdem dies durchgeführt ist, kommt es darauf an, zu zeigen, daß für den speziellen Kern $f(s-t)$ die linear unabhängigen Eigenfunktionen so normiert werden können, daß sie einfache Schwingungen sind. Dies wird aus gruppentheoretischen Eigenschaften erschlossen. Man sieht nämlich leicht, daß für die zu einem Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_k(s)$ gilt:

$$\varphi_i(s+t) = \sum_{k=1}^{h} e_{ik}(t)\varphi_k(s),$$

wobei $||e_{ik}||$ eine unitäre Matrix ist. Diese kann durch unitäre Transformation auf die Diagonalform gebracht werden, woraus die Gleichungen $\varphi_i(s+t) = \varphi_i(s)e_i(t)$ folgen, denen man wegen $\varphi_i(t) = \varphi_i(0)e_i(t)$ sofort die gewünschte Eigenschaft entnimmt.

Die Vollständigkeitsrelation

$$M|f|^2 = \sum |\alpha(\lambda_\nu)|^2$$

folgt analog der Entwicklung der quadratischen Integralform. Verf. gibt hier noch eine Restabschätzung.

Für den Hauptsatz, der aussagt, daß jede stetige fastperiodische Funktion durch endliche Linearaggregate von einfachen Schwingungen gleichmäßig approximiert werden kann, gibt Verf. einen sehr einfachen Beweis: Aus der auf $f(s+t)x(t)$ angewandten Vollständigkeitsrelation wird nämlich die Stelle $f(s)$ dadurch herausgeschält, daß man für $x(t)$ eine solche Funktion wählt, die nur in kleinen Umgebungen von geeignet gewählten Verschiebungszahlen von Null verschieden ist.

Endlich liefert die Methode die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Vollständigkeit. Sei $f(s)$ meßbar und $|f(s)|^2$ summabel in jedem endlichen Intervall. Die *Bohr*sche Fastperiodizität ist durch folgende allgemeinere Forderung zu ersetzen: Zu beliebigem positivem ε soll es ein $l(\varepsilon)$ und $T(\varepsilon)$ geben derart, daß in jedem Intervall von der Länge $l(\varepsilon)$ sich eine Zahl τ findet, welche die Ungleichung

$$M_I^t|f(t+\tau) - f(t)|^2 \leqq \varepsilon^2$$

erfüllt für alle Intervalle I, deren Länge $|I| \geqq T(\varepsilon)$ ist. (IV 7.)

Reviewer: Hammerstein, A., Prof. (Berlin)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Die Theorie der fastperiodischen Funktionen entwickelte H. Bohr namentlich in drei gro?en Abhandlungen in den Acta Mathematica45, S. 29-121;46, S. 101-214;47, S. 237-281 (1924-1926). Zitiert als: Bohr I, II, III.

[2] Der Gedanke einer Ableitung der Parsevalschen Gleichung auf diesem Wege findet sich, worauf ich nachtr?glich aufmerksam gemacht worden bin, schon bei I Schur, Schwarz-Festschrift, S. 404. Doch fehlt dort noch der f?r meine Methode entscheidende Punkt, da die ?Abgeschlossenheit? des Orthogonalsystemse ins als bekannt vorausgesetzt wird. (Zusatz bei der Korrektur 10. 8. 26.)

[3] Siehe z. B. Frobenius, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1911, S. 243.

[4] Vgl. Bohr II, S. 107-119.

[5] Man vgl. dazu auch N. Wiener, Math Zeitschr.24 (1925), S. 575-614. · Zbl 51.0228.06 · doi:10.1007/BF01216799