Franklin, P.

Functions of a complex variable with assigned derivatives at an infinite number of points, and an analogue of Mittag-Leffler's theorem. (English) JFM 52.0303.01

Acta math. 47, 371-385 (1926).

Es handelt sich um folgende Frage (der Einfachheit wegen werde hier nicht die allgemeinste behandelte genau formuliert): Gegeben eine abzählbare Menge von Punkten z_n mit ∞ als einzigem Häufungspunkt, und zu jedem z_n eine Folge von Zahlen $b_{n0}, b_{n1}, \dots$. Von jedem z_n aus werde ein geradliniger Schnitt nach ∞ geführt, und zwar so, daß sich diese Schnitte nicht treffen. Gesucht ist eine Funktion $F(z)$, die in dem so entstandenen Bereich, den Rand ohne die Punkte z_n einbezogen, regulär ist, während sie in den z_n noch stetig und beliebig oft differenzierbar sein und die vorgegebenen Werte als Ableitungen besitzen soll: $F^{(m)}(z_n) = b_{nm}$.

Die Aufgabe wird zunächst für einen einzigen vorgegebenen Punkt, der als der Ursprung gewählt sei, gelöst, indem bei vorgegebenen Ableitungen a_n und der negativ reellen Achse als Schnitt die gesuchte Funktion in Gestalt der Reihe

$$\sum \frac{a_n z^n}{n!} \left(1 - e^{-\frac{b_n}{\sqrt[3]{z}}}\right)$$

angeschrieben wird; für $\sqrt[3]{z}$ ist dabei der auf der reell positiven Achse reelle Zweig zu nehmen; die b_n werden positiv so bestimmt, daß die zu stellenden Konvergenzforderungen erfüllt sind; darüber hinaus kann über sie noch so verfügt werden, daß $F(z)$ und endlich viele ihrer Ableitungen in einem beliebigen endlichen Gebiet, für das der Nullpunkt äußerer Punkt ist, beliebig klein werden, was nachher für eine Konvergenzfrage im allgemeinen Fall von Bedeutung ist.

Dieser erledigt sich durch den Ansatz

$$F(z) = \sum D_n(z) E_n(z),$$

wobei die Funktion $D_n(z)$ in dem eingangs genannten Gebiet einschließlich z_n regulär ist, während sie mit allen ihren Ableitungen in allen andern z_ν verschwindet – eine solche Funktion läßt sich ohne Schwierigkeit aufbauen –; die Gewinnung von $E_n(z)$ fällt unter die vorhin behandelte spezielle Aufgabe: Sie muß in der ganzen durch den Schnitt von z_n aus aufgeschlitzten Ebene regulär sein und in z_n Ableitungen besitzen, die mit den dort vorgegebenen Werten in leicht ersichtlichem Zusammenhang stehen.

Die Frage wird insbesondere noch dahin verallgemeinert, daß für $\{z_n\}$ eine beliebige Menge isolierter Punkte zugelassen wird.

Für den erstgenannten Spezialfall vgl. *J. F. Ritt* (1916; F. d. M. 46, 471) und *A. Besikowitsch* (1924; F. d. M. 50, 240 (JFM 50.0240.*)).

Reviewer: Grunsky, H., Dr. (Berlin)

Full Text: DOI

References:

[1] E. Borel, Sur quelques points de la théorie des fonctions, Ann. de l'Ec. Norm., 1895, p. 38, or Fonctions de variables réelles (1905), p. 70. The problem here stated is not directly mentioned by Borel, but its solution is implicitly contained in his discussion of a related question.S. Bernstein, Appendix to R. D'Adhémar, Principes de l'Analyse, vol. II, p. 272 (1913).

[2] J. F. Ritt, On the Derivatives of a Function at a Point, Annals of Mathematics, 2nd series, vol. 18 (1916), p. 18. · Zbl 46.0471.02 · doi:10.2307/2007146

[3] A. Besikowitsch, Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen. Mathematische Zeitschrift, vol. 21 (1924), p. 111. · Zbl 50.0240.02 · doi:10.1007/BF01187455

[4] G. D. Birkhoff, The Generalized Riemann Problem, Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, vol. 49,

(1913), p. 522. · Zbl 44.0391.03 · doi:10.2307/20025482

[5] G. Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes, Acta Mathematica, vol. 4, (1884), p. 32.

[6] J. F. Ritt, l. c., cf. the remark on p. 21.

[7] See the note at the end of the paper, p. 385.