Hecke, E.

Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. (German) JFM 52.0377.04

Math. Ann. 97, 210-242 (1926).

Vermöge des Gammaintegrals einerseits und des *Mellin*schen Integrals andrerseits ist das Studium der *Dirichlet*schen Reihe

$$\sum_{(n)} \frac{a_n}{n^s}$$

eng verknüpft mit dem Studium der zugehörigen Potenzreihe:

$$\sum_{(n)} a_n x^n, \quad x = e^{-t}.$$

Der Funktionalgleichung einer *Dirichlet*schen Reihe in s entspricht eine solche in t für die Potenzreihe. Es zeigt sich, daß der Funktionalgleichung der L-Reihen der algebraischen Körper ersten und zweiten Grades gerade solche Funktionalgleichungen in t der zugehörigen Potenzreihen entsprechen, welche charakteristisch sind für die Modulfunktionen von t, wobei letztere zu einer Untergruppe der vollen Modulgruppe gehören. So ergibt sich dem Verf. eine neue independente Theorie der zu einer Untergruppe der Modulgruppe gehörigen Modulfunktionen.

Der Beweisgang ist der folgende: Die Funktionalgleichung wird aus der bekannten Funktionalgleichung der L-Reihe hergeleitet. Es genügt hierbei, die Funktionalgleichung der mehrfachen Thetareihen zu benutzen, um sie zu erhalten. Sehr vorteilhaft ist, daß das Verhalten der Potenzreihen nicht nur bei den erzeugenden Substitutionen, sondern für jede Substitution der Gruppe erhalten wird. Bei reellen quadratischen Körpern verschwinden die Potenzreihen für Primzahlgrade identisch, falls die Grundeinheit die Norm -1 hat. Auch ist die Stufe, zu der die neuen Modulfunktionen gehören, nach unten nicht bestimmbar.

In weiteren Abschnitten stellt Verf. neue Modulformen (-1)-ter Dimension auf vermöge der Benutzung der Teilwerte der Weierstraßschen Zetafunktion. Auch von diesen werden Funktionalgleichungen aufgestellt. Zugleich wird die lineare Abhängigkeit der verschiedenen konstruierten Modulformen gleicher Stufe untersucht. Das Bildungsgesetz für die Koeffizienten der Potenzreihen wird aus der Theorie des rationalen, oder quadratisch-imaginären, oder quadratisch-reellen Körpers entnommen, und zwar in der Weise, daß über bestimmte Restklassen nach einem Ideal als Modul summiert wird, wobei der engere oder weitere Äquivalenzbegriff zugrunde gelegt ist. (II 8.)

Reviewer: Fueter, R., Prof. (Zürich)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Wegen der Einzelheiten dieser Theorie sei auf die ausf?hrliche Darstellung von Klein-Fricke, Vorlesungen ?ber die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, 2 Bde., Leipzig 1890, verwiesen.

[2] Zahlentheoretische Untersuchungen aus dem Gebiet der elliptischen Funktionen, G?ttinger Nachr. 1893, I. II. III.

[3] Eine Skizze der hier ausf?hrlich dargestellten Untersuchungen habe ich in einer Note in den G?tt. Nachr. 1925: ??ber einen neuen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunktionen und indefiniten quadratischen Formen? gegeben.