Birkhoff, G. D.

An extension of Poincaré's last geometric theorem. (English) JFM 52.0573.02

Acta Math. 47, 297-311 (1926).

Der letzte geometrische Satz *H. Poincaré*s [Rend. Palermo 33, 375–407 (1912; JFM 43.0757.03)] erhält hier die folgende allgemeinere Fassung:

R sei ein (abgeschlossener) Ringbereich in der Ebene, der von einem Kreis C: $r = a > 0$ und einer einfach geschlossenen Kurve $\mathit{\Gamma}$ begrenzt wird; $\mathit{\Gamma}$ enthalte C im Innern und werde von jedem Halbstrahl $\vartheta =$ const (r, ϑ Polarkoordinaten) nur einmal geschnitten. Durch eine die Indikatrix erhaltende topologische Abbildung T werde R auf einen Ringbereich R_1 abgebildet, der ebenfalls von C und einer Kurve $\mathit{\Gamma}_1$, die denselben Voraussetzungen wie $\mathit{\Gamma}$ genügt, begrenzt wird; dabei gehe C in C, $\mathit{\Gamma}$ in $\mathit{\Gamma}_1$ über. Bei T sollen alle Punkte von C im gleichen Umlaufssinn, die Punkte von $\mathit{\Gamma}$ (im Sinne der ϑ-Koordinate) im dazu entgegengesetzten Umlaufssinn verschoben werden (d. h. wenn für einen Punkt P und seinen Bildpunkt $T(P)$ die ϑ-Werte und damit die Differenz $\delta\,(P) = \vartheta\,(P) - \vartheta\,(T\,(P))$ passend festgelegt sind, soll bei stetiger Fortsetzung in R $\delta\,(P)$ auf C und $\mathit{\Gamma}$ nirgends verschwinden und entgegengesetzte Vorzeichen haben). Schließlich gebe es in R und R_1 keinen Ringbereich mit dem inneren Band C, der bei T oder bei der inversen Transformation T^{-1} auf einen echten Teil von sich abgebildet wird. Unter diesen Voraussetzungen besitzt die Abbildung C mindestens zwei Fixpunkte im Innern von R.

Die Verallgemeinerung gegenüber der ursprünglichen Fassung des Poincaréschen Satzes geht in zwei Richtungen:

(1) Der Bildbereich R_1 braucht nicht mehr mit R zusammenzufallen, was, wie Verf. bemerkt, weitere Anwendungen des Satzes auf dynamische Probleme ermöglicht.

(2) Die Voraussetzung der Existenz einer positiven Integralinvariante ist durch die *topologische* Voraussetzung über das Verhalten der Ringbereiche mit dem inneren Rand C bei den Abbildungen T und T^{-1} ersetzt worden (von der allerdings nicht feststeht, ob sie tatsächlich eine Verallgemeinerung bedeutet).

Der Beweis wird im wesentlichen mit denselben Hilfsmitteln geführt, die Verf. schon beim Beweis der engeren Fassung des Satzes angewendet hat [Trans. Am.Math. Soc. 14, 14–22 (1913; JFM 44.0761.01)]; in dieser Besprechung ist auch die Beweismethode kurz wiedergegeben).

Reviewer: Pannwitz, Erica, Dr. (Berlin)

MSC:

54H25 Fixed-point and coincidence theorems (topological aspects)
37Bxx Topological dynamics

Full Text: DOI

References:

[1] Proof of Poincaré's Geometric Theorem,Transactions of the American Mathematical Society, volume 14; or see a translation in volume 42 of theBulletin de la Société Mathématique de France.

[2] Aclosed curve will be defined as the common boundary of a finite, simply connected, open continuum and the complementary open outer continuum. Aring is the region bounded by two closed curves, one within the other. If these curves do not touch, the ring is a doubly connected open continuum. No other type of ring enters here until the last section 8.

[3] The restriction made on the curves{\(\Gamma\)} and{\(\Gamma\)} 1 might be lightened in that these curves need only to be "right-handedly accessible{" and "left-handedly accessible{", as these terms are defined in my paper, "Surface Transformations and their Dynamical Applications{" in volume 43 of theActa mathematica. But the less general and somewhat simpler theorem stated suffices to illustrate the same type of extension, and appears to be adequate for the dynamical applications.}}}

[4] The notable investigations ofH. Bohr have taken up the analytic representation of such motions. See, for instance, his recent papers: Zur Theorie der fast periodischer Funktionen, volume 45,Acta mathematica; Einige Sätze über Fourierreihe fastperiodischer Funktionen, volume23, Mathematische Zeitschrift.

[5] In my Chicago Colloquium Lectures onDynamical Systems, soon to appear in book form, I establish these assertions.

[6] The case where there are infinitely many invariant points may be excluded from consideration.