Lévy, P.

Sur le théorème de MM. Fischer et Fr. Riesz sur la convergence en moyenne. (French)

JFM 51.0227.02
Bulletin sc. Math. (2) 49, 344-352 (1925); 49, 374-380 (1925).

Im Anschluß an einen Vortrag von *Noaillon* im Hadamardschen Seminar bringt Verf. einen neuen Beweis des Riesz-Fischerschen Satzes. Dieser Beweis fußt auf Ideen von *Weyl* und *Egoroff* und zeigt mancherlei Berührungspunkte mit dem von *Plancherel* gegebenen Beweis (1923; F. d. M. 49, 190 (JFM 49.0190.*)).

Am Anfang wird der bekannte Satz von *Fréchet* über die Darstellung eines linearen Funktionals bewiesen und daraus der Riesz-Fischersche Satz abgeleitet. Umgekehrt wird weiter gezeigt, daß sich der Satz von *Fréchet* aus diesem leicht ableiten läßt, und daß der Riesz-Fischersche Satz durch Benutzung des von Weyl und Egoroff eingeführten Begriffs der "convergence en mesure" direkt beweisbar ist.

Am Schluß wird folgende, von Noaillon gegebene Verallgemeinerung bewiesen: $\omega(r)$ sei eine stetige gerade Funktion, $\omega(0) = 0$, $\omega(r)$ wachse mit $|r|$. Unter Entfernung von $f(x)$, $g(x)$ werde die Größe r verstanden, für welche

$$\omega(r) = \int_0^1 \omega[f(x) - g(x)]\, dx$$

ist. Ist dann $f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ irgend eine Folge meßbarer Funktionen mit der Eigenschaft: $\int_0^1 \omega(f_m - f_n)\, dx \to 0$, für $m, n \to \infty$, so gibt es eine meßbare Funktion $f(x)$ mit der Eigenschaft: $\int_0^1 \omega(f - f_n)\, dx \to 0$ für $n \to \infty$.

Umgekehrt, wenn $\omega(r)$ die weitere Voraussetzung $\omega(2r) \leqq k\omega(r)$, $k =$ const. erfüllt, folgt aus $\int_0^1 \omega(f - f_n)\, dx \to 0$, $n \to \infty$, die Formel $\int_0^1 \omega(f_n - f_m)\, dx \to 0$, $m, n \to \infty$.

Die älteren Resultate von Riesz, Fischer, Plancherel sind hierin für $\omega(r) = r^\alpha$, $\alpha > 0$, enthalten. (IV 7.)

Reviewer: Plancherel, M., Prof. (Zürich)