Artin, E.

Theorie der Zöpfe. (German) JFM 51.0450.01

Abhandlungen Hamburg 4, 47-72 (1925).

Auf zwei parallelen Drähten im Raume seien kongruente Punktmengen A_1, ..., A_n bzw. B_1, ...B_n fixiert und jeder Punkt A_i des einen Drahtes sei mit genau einem $B_{i'}$ des anderen durch einen Faden verbunden, der ohne umzukehren monoton von einem Draht zum ändern läuft; die Projektion des Gebildes auf die Ebene der beiden Drähte enthalte nur einfache Schnittpunkte. Drähte und Fäden seien als undurchdringlich (auch in bezug auf Selbstüberschneidungen) betrachtet. Ein solches Gebilde nennt Verf. einen Zopf; ihn interessieren die Eigenschaften des Zopfes, die bei Deformationen invariant bleiben. Die Fäden werden dabei stets als von A_i nach $B_{i'}$ orientiert betrachtet.

Die Gesamtheit der Zöpfe mit gleich viel Fäden läßt sich als Gruppe auffassen, wenn als verbindende Relation die Aneinandersetzung zweier Zöpfe längs eines Drahtes mit Löschung dieses Drahtes erklärt ist. Diese Zopfgruppe n-ter Ordnung läßt sich nun aus $(n-1)$ Erzeugenden σ_i aufbauen, zwischen denen gewisse Relationen bestehen. σ_i ist dabei der Zopf, bei dem A_i mit B_{i+1} und A_{i+1} mit B_i durch Fäden verbunden sind, von denen der erste den zweiten einfach überkreuzt, während die übrigen Punkte in natürlicher Weise miteinander verbunden sind. Eine zu der Zopfgruppe homomorphe Gruppe ist die symmetrische Gruppe in n Vertauschungssymbolen, die aus ihr z. B. durch $\sigma_1^2=1$ entsteht.

Ein "geschlossener Zopf" wird aus einem Zopf dadurch erzeugt, daß man die beiden Drähte identifiziert, das Gebilde um eine Achse schlingt und die Drähte schließlich wegläßt. Die Achse ist gegenüber Deformationen als undurchdringlich anzusehen. Zwei geschlossene Zöpfe sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie in der Zopfgruppe ähnlich sind. Läßt man aus einem geschlossenen Zopf die Achse weg, so erhält man eine Verkettung, und zwar läßt sich jede Verkettung so gewinnen.

Die Bedeutung der Zopftheorie für die Verkettungstheorie kommt daher, daß man aus der Darstellung des Zopfes die Fundamentalgruppe der Verkettung gewinnen kann. Die Fundamentalgruppe läßt sich aus Elementen $t_\nu^{(\varrho)}$ aufbauen ; dabei denkt man sich den Zopf $\sigma_i^{\pm1}\sigma_{i'}^{\pm1}\dots\sigma_{i(\varrho)}^{\pm1}\dots\sigma_{i(r-1)}^{\pm1}$ entsprechend dieser Produktdarstellung in Schichten (die Zöpfe $\sigma_{i(\varrho)}^{\pm1}$) zerlegt und nennt den Weg, der den ν-ten Faden in der ϱ-ten Schicht umschlingt, $t_\nu^{(\varrho)}$. Schiebt man einen Elementarweg t_ν durch alle Schichten zyklisch in die Ausgangsschicht zurück, so entsteht ein Weg $T_\nu=Q_\nu^{-1}t_{\nu'}Q_\nu$; diese Tatsache liefert zusammen mit $T_1T_2\dots T_n=t_1t_2\dots t_n$ alle Relationen der Fundamentalgruppe. Jede Gruppe mit diesen Relationen läßt sich überdies als Fundamentalgruppe einer Verkettung auffassen.

Schreibt man für alle Zöpfe n-ter Ordnung die Permutationen $t_i\to T_i$ auf, so erhält man eine zur Zopfgruppe isomorphe Gruppe. Diese Bemerkung ermöglicht die Entscheidung bezüglich der Identität zweier Zöpfe, denn die angegebene zur Zopfgruppe isomorphe Gruppe ist auf eine Normalform gebracht, von der man unmittelbar die etwaige Identität ablesen kann.

Zum Schluß werden die referierten Ergebnisse auf die Fälle $n=2$ und 3 angewandt. (II 5.)

Reviewer: Freudenthal, H., Dr. (Amsterdam)

Full Text: DOI

References:

[1] J. Nielsen, Die Isomorphismengruppe der freien Gruppen. Mathematische Annalen, Bd. 91, S. 169. · Zbl 50.0078.04
[2] H. Brunn, Über verknotete Curven. Verh. Math.-Kongr. Zürich 1897, S. 256. · Zbl 29.0423.02
[3] J. W. Alexander: A Lemma on Systems of Knotted Curves. Proc. Nat. Ac. U. S. A., vol. 9, S. 93.
[4] M. Dehn, Die beiden Kleeblattschlingen. Math. Ann., Bd. 75, S. 402.
[5] O. Schreier, Über die GruppenA a B b =1. Hamburger Abhandlungen Bd. 3, S. 167.