zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

Hasse, Helmut

Das allgemeine Reziprozitätsgesetz und seine Ergänzungssätze in beliebigen algebraischen Zahlkörpern für gewisse, nichtprimäre Zahlen. (German) JFM 50.0105.02

J. Reine Angew. Math. 153, 192-207 (1924).

Das von Hilbert mittels seines Normenrestsymbols in die Form

$$\prod_{\mathfrak{w}} \left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{w}}\right) = 1$$

gesetzte allgemeinste Reziprozitätsgesetz für die l-ten Potenzreste (l Primzahl) in einem algebraischen Zahlkörper k, der die l-te Einheitswurzel ζ enthält, konnte bisher (abgesehen von speziellen Körpern k) nur für spezielle, sog. primäre bzw. hyperprimäre α in eine explizite Form gesetzt werden, nämlich:

$$\begin{array}{rcll} \text{Allgem. Rez.-Ges.:} & \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} & = 1, & \text{wenn } (\alpha,l)=(\beta,l)=(\alpha,\beta)=1 \text{ und } \alpha \text{primär}, \\ \text{1. Erg.-Satz:} & \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right) & = 1, & \text{wenn } (\varepsilon)=\mathfrak{a}^l \text{ und } \alpha \text{ primär}, \\ \text{2. Erg.-Satz:} & (\varepsilon\alpha) & = 1, & \text{wenn } \frac{(\lambda)}{(\lambda,l)}=\mathfrak{a}^l=\mathfrak{a}^l \text{ und } \alpha \text{ hyperprimär}. \end{array}$$

Mittels einer ausführlichen Theorie der Hilbertschen Normenrestsymbole $\left(\frac{\alpha,\beta}{\mathfrak{l}}\right)$ für die Primteiler $\mathfrak{l}$ von l, wie sie in einer Reihe vorhergehender Arbeiten von K. Hensel und dem Verf. entwickelt ist, erhält der Verf. allgemeinere explizite Formeln für gewisse nicht-primäre α, nämlich:

$$\text{Allgem. Rez.-Ges.: } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} = \zeta^{S\left(\frac{a-1}{l}\,\frac{\beta-1}{\lambda_0}\right)}, \text{ wenn } (\alpha,\beta)=1 \text{ und } \left\{\begin{matrix} \alpha \equiv 1 \bmod l \\ \beta \equiv 1 \bmod \lambda_0 \end{matrix}\right\},$$

$$\text{1. Erg.-Satz: } \left(\frac{\zeta}{\alpha}\right) = \zeta^{S\left(\frac{a-1}{l}\right)}, \text{ wenn } \alpha \equiv 1 \bmod l,$$

$$\text{2. Erg.-Satz: } \left(\frac{l}{a}\right) = \zeta^{S\left(\frac{a-1}{\lambda l_0}\right)}, \text{ wenn } \alpha \equiv 1 \bmod l\lambda_0.$$

Dabei ist $\lambda_0 = 1-\zeta$ gesetzt und S bezeichnet die Spur in k. Die allgemeine Formel enthält das bekannte Eisensteinsche Reziprozitätsgesetz im Körper der l-ten Einheitswurzeln als Spezialfall, und die drei Formeln zusammen liefern für $l=2$ und den rationalen Zahlkörper für k das bekannte quadratische Reziprozitätsgesetz nebst den beiden Ergänzungssätzen in allgemeinster Form (bis auf eine geringe Einschränkung für den 2. Ergänzungssatz).

Reviewer: Hasse, Prof. (Halle an der Saale)

MSC:

11R37 Class field theory
11A15 Power residues, reciprocity

Cited in **2** Reviews
Cited in **1** Document

Keywords:

general reciprocity law; Hilbert norm residue symbol; Eisenstein reciprocity law

Full Text: Crelle EuDML

Edited by FIZ Karlsruhe, the European Mathematical Society and the Heidelberg Academy of Sciences and Humanities
© 2021 FIZ Karlsruhe GmbH