Lichtenstein, L.
Über die erste Randwertaufgabe der Elastizitätstheorie. (German) JFM 50.0535.09
Math. Zs. 20, 21-28 (1924).

Neue Methode zur Lösung des Hauptproblems der Elastizitätstheorie der Bestimmung der Verschiebungen der Punkte einer homogenen und isotropen elastischen Körpers T aus denjenigen an seiner Oberfläche S.

Sind u, v, w die Komponenten der Infinitemasilverschiebung eines beliebigen Punktes (x, y, z) des Körpers, und λ, μ die Laméschen elastischen Konstanten desselben, so besteht die fragliche Aufgabe, unter Vernachlässigung der Massenkräfte, in folgendem: Man bestimme drei Funktionen u, v, w von x, y, z, die in $T+S$ stetig sind und in T partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen haben, die den folgenden Gleichungen genügen:

$$\Delta u = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial x};\ \Delta v = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial y};\ \Delta w = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial z};\ \theta = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial v}\partial y+\frac{\partial w}{\partial z},$$

wobei die Werte dieser Funktionen auf S gegeben sind.

Verf. zieht die drei in T harmonischen Funktionen u_0, v_0, w_0, heran, die auf S mit u, v, w übereinstimmen und zeigt das Bestehen der Formeln:

$$(1)\quad u = u_0 + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu}\int_S \frac{\partial}{\partial n}G(x,y,z;\sigma)(\xi-x)\theta(\sigma)d\sigma,$$

v, w entsprechend, worin $\sigma\equiv\sigma(\xi,\eta,\zeta)$ ein beliebiger Punkt von S, G die klassische Greensche Funktion von T und n die innere Normale von S ist.

Das ganze Problem reduziert sich also auf die Bestimmung von θ, das überdies, wie unschwer zu sehen, in T harmonisch ist, so daß man nur seine Werte auf S zu kennen braucht.

Es möge nun (x, y, z) einen inneren Punkt von T bedeuten, ϱ sei der Radiusvektor von σ nach jenem Pol, ferner

$$\Lambda = \frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{\partial w_0}{\partial z};$$

alsdann beweist Verf. aus (1):

$$(2)\quad \theta = \frac{2\mu}{3\lambda+5\mu}\Lambda + \frac{\lambda+\mu}{4\pi(3\lambda+5\mu)}\int_S \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho\partial n}\theta(\sigma)d\sigma.$$

Unter Benutzung gewisser Resultate von P. Lévy über das Verhalten der Greenschen Funktion an der Gebietsgrenze (Acta Math. 42, 207-267; 1919) läßt es sich nun zeigen, daß beim Übergang des Pols zu einem Punkt $\overline{\sigma}$ von S die Beziehung (2) zur folgenden linearen Integralgleichung führt:

$$(3)\quad \theta(\overline{\sigma}) = \frac{2\mu}{\lambda+3\mu}\Lambda(\overline{\sigma}) + \frac{\lambda+\mu}{4\pi(\lambda+3\mu)}\int_S \overline{\varrho}\frac{\partial^2 G}{\partial\overline{\varrho}\partial n}\theta(\sigma)d\sigma.$$

Der Kern in dieser Gleichung wird für $\overline{\sigma}\to\sigma$ unendlich wie $\overline{\varrho}^{-1}$, dieselbe ist also regulär im Sinne der demnach anwendbaren Fredholmschen Theorie. Daß (3) überdies lösbar ist, folgt, wie in der Arbeit gezeigt wird, einfach aus der bekannten Tatsache, daß für das behandelte erste Randwertproblem der Elastizitätstheorie ein Eindeutigkeitssatz besteht.

Reviewer: Tricomi, Prof. (Florenz) (Müntz, Prof. (Leningrad))