Carleman, T.

Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique. (French) JFM 49.0272.01

Uppsala Universitets Årsskrift 1923. Matematik och Naturvetenskap. 3; 228 S. 8° (1923).

Wir charakterisieren den Inhalt dieser wertvollen Arbeit am besten, indem wir dem Verf. selbst das Wort geben. Er äußert sich in der Einleitung wie folgt: "Wir nennen, wie üblich, eine Integralgleichung

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x)$$

singulär, wenn auf sie die Fredholmschen Fundamentalsätze nicht anwendbar sind. Eine große Anzahl von derartigen besonderen Gleichungen ist ausführlich untersucht worden. Als Beispiele führen wir die von den Herren Picard und Goursat betrachteten Gleichungen an. Die Lösung des Dirichletschen Problems durch ein Potential der doppelten Belegung, welche die erste und eine der wichtigsten Anwendungen der Fredholmschen Theorie ist, führt auf eine singuläre Gleichung, wenn der Rand des Gebietes Ecken aufweist.

Die besondere Wichtigkeit der reellen und symmetrischen Kerne $K(x,y)$ (oder allgemeiner der Hermiteschen Kerne) ist durch die Arbeiten des Herrn Hilbert dargetan worden. Seine Theorie der quadratischen Formen mit unendlich vielen Variablen erlaubt, eine Klasse von singulären Integralgleichungen mit reellem und symmetrischem Kern zu behandeln. Diese Klasse ist charakterisiert durch die Bedingungen:

$$\int_a^b K(x,y)^2\,dy \text{ hat im allgemeinen einen Sinn,} \tag{A}$$

und

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y)u(x)u(y)\,dxdy \leqq k^2\int_a^b u(x)^2\,dx, \tag{B}$$

wobei k eine von $u(x)$ unabhängige Konstante bezeichnet. In diesem Falle nennen wir den Kern $K(x,y)$ beschränkt.

Indem ich von einem Gesichtspunkt ausgehe, den ich bereits in einer Comptes-Rendus-Note (17. Aug. 1920) kurz skizziert habe, versuche ich in diesem Werke eine allgemeinere Theorie zu entwickeln, wo auf die Bedingung B verzichtet wird. Man findet auch hier, wie im regulären Falle, die einfachsten Resultate bei nicht reellen λ. Ich beweise, daß die Gleichung (1) wenn $|f(x)|$ quadratisch summierbar ist, mindestens eine Lösung von gleicher Beschaffenheit für jeden nicht reellen Wert von λ zuläßt. Andererseits ist die Zahl ϱ der linear unabhängigen Lösungen (mit integrierbarem Quadrat) der homogenen Gleichung

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=0$$

dieselbe für alle nicht reellen Werte von λ (ϱ kann gleich ∞ sein). Wir sagen, $K(x,y)$ gehört zur Klasse I oder II, je nachdem $\varrho=0$ oder $\varrho>0$.

Mit $G_n(x,y)$ bezeichnen wir eine Folge von Hermiteschen Kernen mit summierbarem Quadrat, die im Mittel (bezüglich y) gegen $K(x,y)$ konvergieren, außer für gewisse singuläre Werte von x. Es sei $\varphi_n(x)$ die Lösung der Gleichung

$$\varphi_n(x)-\lambda\int_a^b G_n(x,y)\varphi_n(y)\,dy=f(x)\qquad(\lambda=\alpha+i\beta,\ \beta\neq 0).$$

Dann stellen wir die Größen $Z_n=\varphi_n(x)$ (x ist als gegeben anzusehen) in der Zahlenebene dar. Die Menge der Häufungspunkte, welche die Folge Z_n (für jede mögliche Wahl der $G_n(x,y)$) hat, wird dann aus einem Kreise bestehen. Dieser Kreis reduziert sich auf einen Punkt, wenn $K(x,y)$ zur Klasse I gehört. Jeder Folge $G_n(x,y)$ kann man eine oder mehrere Spektralfunktionen $\theta(x,y/\lambda)$ entsprechen lassen, die in bezug auf λ in dem Intervall $(-l, l; l$ beliebig) von beschränkter Schwankung sind, dagegen bezüglich x, y sich wie ein beschränkter Kern verhalten. Jede Spektralfunktion gibt Veranlassung zu einer Entwicklung der Form

$$\int_a^b K(x,y)h(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\,d\lambda \int_a^b \theta(x, y/\lambda)h(y)\,dy,$$

wo $h(x)$ eine willkürliche Funktion mit summierbarem Quadrat ist. Wenn $K(x,y)$ zur Klasse I gehört, existiert nur eine Spektralfunktion, und diese befriedigt dieselben Orthogonalitätsrelationen, welche nach der Hilbertschen Theorie in dem Falle der beschränkten Kerne gültig sind.

An dem Beispiel der Schallausbreitung in einer unendlichen Atmosphäre, in der sich feste Körper befinden, habe ich gezeigt, von welchem Interesse es sein kann, zu wissen, ob eine Spektralfunktion absolut stetig in bezug auf λ ist oder nicht.

In dem Kapitel IV habe ich die Bedingung (A) durch andere viel weniger fordernde ersetzt, wodurch die Theorie auf eine Menge neuer Probleme anwendbar wird.

Das Kapitel V enthält eine Reihe von Anwendungen der allgemeinen Theorie. Da man eine quadratische Form $\sum a_{pq}x_px_q$ mit unendlich viel Variablen in der Gestalt

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} K(x,y)h(x)h(y)\,dxdy$$

schreiben kann, wenn $K(x,y)$ und $h(x)$ passend gewählt sind, so sieht man, daß sich die Untersuchung einer derartigen Form auf das Studium einer Integralgleichung zurückführen läßt. Durch Betrachtung der speziellen Form

$$\sum a_px_p^2 - 2\sum b_px_px_{p+1}, \qquad b_p \neq 0$$

habe ich als Korollar der allgemeinen Sätze dieser Abhandlung nicht nur die Stieltjessche Theorie der Kettenbrüche, sondern auch die neuen, vor kurzem von Herrn Hamburger erhaltenen Resultate abgeleitet."