zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

Tricomi, Fr.

Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2^0 ordine di tipo misto. (Italian)

JFM 49.0346.01
Acc. Linc. Rend. (5) 14, 133-247 (1923).

Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen ist

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+D\frac{\partial z}{\partial x}+E\frac{\partial z}{\partial y}+Fz+G=0. \tag{1}$$

Die Koeffizienten $A(x,y),\dots,G(x,y)$ seien in einem gewissen Gebiete der (x,y)-Ebene reell und stetig. Bisher wurde (1) nur in Gebieten untersucht, wo ständig entweder $B^2-AC<0$ (elliptischer Fall) oder >0 (hyperbolischer Fall) oder $=0$ (parabolischer Fall) ist. Die Gleichung $B^2-AC=0$ stellt im allgemeinen eine Kurve dar, welche die Ebene in Gebiete mit abwechselnd positivem und negativem B^2-AC zerlegt. Tricomi untersucht nun (1) in einem Gebiete, das ein Stück der "parabolischen Kurve" $B^2-AC=0$ in seinem Innern enthält, in dem also B^2-AC sein Vorzeichen wechselt, und nennt (1) vom "gemischten Typus". Zunächst ist (1) auf eine Normalform zurückzuführen. Unter Ausschluß gewisser Ausnahmefälle ist es möglich, durch eine reelle Transformation der unabhängigen Variablen die Normalform herzustellen

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz+d=0. \tag{2}$$

Hier ist die x-Achse die parabolische Kurve. Die einfachste Gleichung vom gemischten Typus ist offenbar

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0. \tag{E}$$

Mit ihr beschäftigt sich der Verfasser ausschließlich. Sie spielt in der neuen Theorie eine ähnliche Rolle wie die Gleichungen

$$\Delta z=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

im elliptischen, bzw. hyperbolischen, bzw. parabolischen Falle. Sie kann in der "elliptischen Halbebene" $y>0$ durch die reelle Transformation

$$\xi=x,\quad \eta=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} \tag{3}$$

auf die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial z}{\partial \eta}=0 \tag{E$_1$}$$

und in der "hyperbolischen Halbebene" $y<0$ mittels

$$\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},\quad \eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}} \tag{4}$$

auf die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta}\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0 \tag{E$_2$}$$

gebracht werden. Die Gleichung (E_2) ist ein Spezialfall der Euler-Poissonschen Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial\eta}\frac{1}{\xi-\eta}\left(\beta\frac{\partial z}{\partial \xi}\beta'\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$ für $\beta=\beta'=\frac{1}{6}$. Die Charakteristiken von (E) sind für $y<0$ gegeben durch $x\pm\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=\text{const.}=k$ oder $(x-k)^2+\frac{4}{9}y^3=0$. Sie sind also Kurven 3. Grades mit einer Spitze auf der x-Achse. Es seien jetzt A und B irgend zwei endliche Punkte der x-Achse. Die von ihnen in der hyperbolischen Halbebene ausgehenden Charakteristiken mögen einander in C schneiden. Wir verbinden A und B in der elliptischen Halbebene durch eine Kurve σ, die denselben Grad von Allgemeinheit hat wie die in der Theorie der

© 2022 FIZ Karlsruhe GmbH

elliptischen Gleichungen betrachteten Ränder. Dann lautet der Eindeutigkeitssatz: “In dem von a und den Charakteristiken AC und BC begrenzten Gebiete gibt es höchstens eine reguläre Lösung von (E), welche auf σ und auf einem der Bogen AC oder BC vorgeschriebene stetige Werte annimmt”. Unter “regulärer” Lösung versteht man dabei eine solche, die im Gebiete und auf seinem Rande stetig ist und deren Ableitungen erster Ordnung im Innern des Gebietes stetig sind. Ferner wird noch verlangt, daß, falls $\frac{\partial z}{\partial y}$ bei Annäherung an A oder B unendlich wird, die Ordnung dieser Unendlichkeit kleiner als $\frac{5}{6}$ ist. Der vom Verf. bewiesene Existenzsatz hat eine etwas weniger allgemeine Form als der Eindeutigkeitssatz. Um seine Formulierung zu verstehen, müssen wir die “Normalkurven” einführen. Das sind die in der elliptischen Halbebene gelegenen Bogen der Kurven

$$(x-k)^2 + \frac{4}{9}y^3 = h^2, \tag{5}$$

wo h, k beliebige Konstante $(h \neq 0)$ sind. Offenbar ist (5) das durch die Transformation (3) gewonnene Abbild des in der Halbebene $\eta > 0$ gelegenen Halbkreises $(\xi - k)^2 + \eta^2 = h^2$. Durch zwei beliebige Punkte A, B der x-Achse geht immer eine und nur eine Normalkurve. Es wird nun die etwas speziellere Annahme gemacht, daß die A und B verbindende Kurve σ mit zwei beliebig kleinen, aber endlichen Bogen $A'A$, $B'B$ der durch A, B gelegten Normalkurve endigt und in ihrem übrigen Teile ganz außerhalb dieser Normalkurve liegt, sonst aber denselben Grad von Allgemeinheit wie beim Eindeutigkeitssatze hat. Alsdann gilt der Satz: “In dem von σ, AC und BC begrenzten Gebiete existiert eine (und nur eine) reguläre Lösung von (E), welche auf σ und auf AC die vorgeschriebenen Werte f bzw. φ annimmt, wenn f nebst den ersten beiden und φ nebst den ersten drei Ableitungen (nach der Bogenlänge) stetig sind und in A die Werte von f und φ und ihren ersten Ableitungen übereinstimmen. Wegen der Beweismethode kann nur summarisch bemerkt werden, daß sie in der Zurückführung auf Integralgleichungen gipfelt.

Reviewer: Sternberg, Dr. (Heidelberg)

Cited in **4** Reviews
Cited in **74** Documents