Thomsen, G.

Über konforme Geometrie I: Grundlagen der konformen Flächentheorie. (German)

JFM 49.0530.02
Hamb. Math. Abh. 3, 31-56 (1923).

In der vorliegenden Arbeit wird zum ersten Male das vollständige Formelsystem der konformen Flächentheorie entwickelt, und zwar in (passend normierten) pentasphärischen Koordinaten mit Benutzung der Tensorrechnung. Eine reelle Fläche mit bestimmten Krümmungslinien, die nicht isotherm ist, ist bis auf konforme Transformationen eindeutig bestimmt durch drei quadratische Differentialformen, deren Koeffizienten noch einer differentiellen Bedingungsungleichung genügen. Die Nullkurven dieser drei Grundformen sind die Minimalkurven, die Krümmungslinien und die Winkelhalbierenden Kurven der Krümmungslinien. An Stelle der begleitenden Vektoren z. B. der affinen Flächentheorie treten hier natürlich begleitende (allgemeine und Punkt-) Kugeln, nämlich: der betrachtete Punkt $(x(u,v))$ der Fläche selbst, die beiden Ableitungskugeln $\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)$, $\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)$, die *Zentralkugel* und der *Hauptpunkt*. Die *Zentralkugel* ist jene die Fläche in (x) berührende Kugel, deren Schnittkurve mit der Fläche dort einen Doppelpunkt mit senkrechten Tangenten besitzt. (Die Richtungen dieser Tangenten sind die Nullrichtungen der dritten Grundform.) Für jede dieser Tangenten gibt es eine Kugel, die auf dem zugehörigen Linienelemente der Fläche und außerdem noch auf der in der Tangentenrichtung benachbarten Zentralkugel senkrecht steht. Der Schnittpunkt der so erklärten beiden Kugeln und der Zentralkugel des Punktes (x) ist der *Hauptpunkt*. Nach Normierung der pentasphärischen Koordinaten, Aufstellung der Grundformen und der begleitenden Kugeln verläuft die weitere Herleitung des Formelapparates in der üblichen Weise (Ableitungsgleichungen, Integrabilitätsbedingungen). Dabei ergeben sich insbesondere drei durch eine quadratische Relation verbundene absolute Differentialinvarianten dritter und fünf unabhängige vierter Ordnung. Die gewonnenen Formeln werden noch für Krümmungslinienparameter spezialisiert, wobei sich die kennzeichnenden Bedingungen für die Kanalflächen, die Dupinschen Zykliden, die Isothermflächen in invarianter Form mühelos ablesen lassen.

Hierauf stellt der Verf. die notwendige und hinreichende Bedingung dafür auf, daß die Kugeln einer Kugelkongruenz die Zentralkugeln des einen Enveloppenmantels sind, und untersucht anschließend, welche von den Differentialinvarianten dieses Enveloppenmantels solche niedrigster (zweiter) Ordnung der Zentralkugelkongruenz sind. Endlich behandelt er die *Konformminimalflächen*, d. h. die Extremalen des Variationsproblems des einfachsten konform invarianten Doppelintegrales. Sie sind geometrisch dadurch gekennzeichnet, daß die Kugeln ihrer Zentralkugelkongruenz für beide Enveloppenmäntel Zentralkugeln sind. Beide Enveloppenmäntel einer solchen Kongruenz sind Konformminimalflächen. Die Integration der Differentialgleichung der Konformminimalflächen kommt auf die Integration einer Moutardschen Gleichung hinaus. Als die Konformminimalflächen, die gleichzeitig Isothermflächen sind, ergeben sich die Minimalflächen der euklidischen und nichteuklidischen Bewegungsgeometrie und ihre Konformverwandten.

Reviewer: Berwald, Prof. (Prag)

Full Text: DOI

References:

[1] A. Tresse, Comptes Rendus. CXIV (1892) S. 948–950 und Acta math. 18 (1894) 1-88.

[2] O. Fubini, Torino Atti 38 (1903), Lomb. Ist. Rend. 38 (1905) und Rend. d. c. matem. di Palermo 41 (1916) {\S} 10.

[3] P. Calapso, Rend. d. c. matem. di Palermo 22 (1906) S. 197–213. · Zbl 37.0178.03 · doi:10.1007/BF03018613

[4] A. Voss, Sitzungsber. Akad. zu München. 1907 S. 77–112 und 1920 S. 229–259.

[5] R. Rothe, Math. Ann. 72 (1912) S. 57. · Zbl 43.0692.03 · doi:10.1007/BF01456890

[6] Besserve, Thèse. Paris 1915.

[7] E. Vessiot, Compt. Rend. 174 (1922) 989–991, 1101–1104. Journ. de Math. 1923 S. 99–165. · Zbl 48.0815.01

[8] H. Liebmann, Heidelberger Akad. der Wissensch. 1923 S. 1–20.

[9] Vergleiche etwaBlaschke: Differentialgeometrie, Band 2, {\S} 53ff.

[10] Tresse, a. a. O.

[11] Darboux, a. a. O. Bd. II, Kap. 15, S. 322ff.

[12] Darboux, a. a. O. Bd. II, Kap. 15, S. 329ff.