Riesz, M.

Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant. (French)

JFM 49.0708.02
Acta Litt. ac Scient. Univ. Hung. 1, 209-225 (1923).

Es sei $q_0(x), q_1(x), \ldots$ eine reelle Polynomfolge derart, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q_n(x) q_m(x)\, d\varphi(x) = \delta_{nm}$$

gilt, wobei φ eine nicht abnehmende Funktion bezeichnet und q_n vom Grade n ist. Dafür, daß die zu diesem Orthogonalsystem und zu $d\varphi(x)$ gehörige Parsevalsche Relation für jede auf $[-\infty, +\infty]$ in bezug auf $d\varphi(x)$ samt Quadrat integrierbare (reellwertige) Funktion gilt (die Stieltjessche Integrierbarkeit unstetiger Funktionen für endliche Intervalle in einem üblichen, auf Lebesgue zurückgehenden Sinne verstanden), ist notwendig und hinreichend, daß $d\varphi(x)$ gemäß der Hamburger-Carlemanschen Momententheorie "extremal" ist. Es ist also z. B. hinreichend, daß die zu $d\varphi$ gehörigen Momente ein bestimmtes Momentenproblem darstellen (indem es keine, von φ wesentlich verschiedene monotone Belegung gibt, die dieselben Momente wie φ besitzt). Der schöne Satz deckt die wahren Gründe z. B. der sich auf Hermitesche bzw. Laguerresche Polynome beziehenden Untersuchungen von Weyl und Wigert auf.

Im ausschlaggebenden Falle der Bestimmtheit ist der Satz ungefähr gleichzeitig auch von Carleman gefunden worden; vgl. S. 272 dieses Bandes der F. d. M.

Reviewer: Wintner, A., Dr. (Leipzig)