Noether, E.
Idealtheorie in Ringbereichen. (German) JFM 48.0121.03
Math. Ann. 83, 24-66 (1921).

Es handelt sich um die Übertragung der Zerlegungssätze der ganzen rationalen Zahlen, bzw. der Ideale in algebraischen Zahlkörpern auf allgemeine Ringe, die nur der Endlichkeitsbedingung genügen, daß in ihnen der Satz von der endlichen Kette gilt: Eine einfach geordnete Reihe von Idealen, von denen jedes ein echter Teiler des vorangehenden ist, bricht im Endlichen ab – oder was damit identisch ist, jedes Ideal besitzt eine endliche Idealbasis. Unter dieser Voraussetzung existieren die – im Fall der algebraischen Zahlkörper zusammenfallenden – Darstellungen eines Ideals als Produkt von endlich vielen paarweise teilerfremden und teilerfremd-irreduzibeln Idealen; als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen gegenseitig primen und in diesem Sinn irreduzibeln Idealen; als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen größten primären Komponenten und schließlich als kleinstes gemeinsames Vielfaches von endlich vielen irreduzibeln Komponenten. Diese Darstellungen entstehen jeweils durch Unterspaltung aus einander; die beiden ersten sind eindeutig, bei den andern sind Anzahl der Komponenten und zugehörige Primideale eindeutig bestimmt. Ein weiterer Eindeutigkeitssatz, der sich in anschließenden Arbeiten als am wesentlichsten gezeigt hat, ist die eindeutige Bestimmtheit der isolierten Komponenten durch ihre Primideale. Die Beweise der Sätze ergeben sich alle als Folgerungen des Satzes über die irreduzibeln Komponenten; die Anzahlgleichheit wird hier mit Modulbetrachtungen bewiesen, denn sie ist in dem umfassenderen Fall des Modulbereichs erfüllt. Für Ideale im Gegensatz zu Moduln ist die Tatsache charakteristisch, daß jedes irreduzible Ideal zugleich primär wird; hieraus folgt die Eindeutigkeit der zugehörigen Primideale. Die getrennten Zerlegungen treten schon in dem einfachen Fall des Polynombereichs von zwei Unbestimmten auf (die in §10 der Arbeit noch beibehaltene Unbestimmte z kann überall weggelassen werden); im Polynombereich hat die hier entwickelte Theorie auch bis jetzt ihr Hauptanwendungsgebiet gefunden; sie ergibt aber auch für andere Gebiete eine Klärung der Grundbegriffe. Zu der in der Arbeit gegebenen historischen Übersicht ist hinzuzufügen, daß der Begriff des irreduzibeln Ideals sich in ganz anderer Fassung für den Polynombereich schon bei Macaulay (Math. Ann. 74) findet.

Reviewer: Noether, E., Prof. (Göttingen)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Ist diese Potenz stets die erste, so handelt es sich bekanntlich um Primzahlen.

[2] vermutlich gilt darüber hinaus auch das Übereinstimmen der Exponenten, und noch allgemeiner die Isomorphie entsprechender Komponenten.

[3] E. Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale. Math. Ann.60 (1905), S. 20, Satz VII und XIII.?F. S. Macaulay, On the Resolution of a given Modular System into Primary Systems including some Properties of Hilbert Numbers. Math. Ann. 74 (1913), S. 66. · Zbl 36.0292.01 · doi:10.1007/BF01447495

[4] W. Schmeidler, Über Moduln und Gruppen hyperkomplexer Größen. Math. Zeitschr.3 (1919), S. 29. · Zbl 47.0096.03 · doi:10.1007/BF01292594

[5] E. Noether W. Schmeidler, Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential-und Differenzenausdrücken. Math. Zeitschr.8 (1920), S. 1. · Zbl 47.0097.03 · doi:10.1007/BF01212856

[6] A. Fraenkel, Über die Teiler der Null und die Zerlegung von Ringen. J. f. M.145 (1914), S. 139. Über gewisse Teilbereiche und Erweiterungen von Ringen. Habilitationsschrift, Leipzig, Teubner, 1916. Über einfache Erweiterungen zerlegbarer Ringe. J. f. M.151 (1920), S. 121.

[7] Die Definition ist der Fraenkelschen Habilitationsschrift entnommen, unter Weglassung dessen einschränkender Bedingungen 6, I und II; dafür mußte das kommutative Gesetz der Addition mit aufgenommen werden. Es handelt sich also um die den Körper definierenden Gesetze unter Weglassung der Umkehrbarkeit der Multiplikation.

[8] Zuerst ausgesprochen für Zahlenmoduln von Dedekind: Zahlentheorie, Suppl. XI, {\S} 172, Satz VIII (4. Auflage); unser

Beweis und die Bezeichnung ?Kette? ist von dort übernommen. Für Ideale aus Polynomen bei Lasker, a. a. O. Zur Theorie der Moduln und Ideale. Math. Ann.60 (1905), S. 56 (Hilfssatz). Der Satz findet aber in beiden Fällen nur vereinzelte Anwendung. Unsere Anwenwendungen beruhen durchweg auf demAuswahlpostulat.

[9] Daß eine solche durch die gegebene Darstellung nicht eindeutig definiert ist, zeigt das vorige Beispiel. Für (x 2,xy)=[(x), (x 2,xy,y ?)], wo ??2, ist neben [(x), (x 2,y)] auch [(x), (x 2,?x+y)] für beliebiges ? eine reduzierte Darstellung.

[10] Daß eine solche Darstellung im allgemeinen nicht eindeutig ist, zeigt das vorige Beispiel: (x 2,xy)=[(x), (x 2,?x+y)]. Die beiden Komponenten sind bei beliebigem ? irreduzibel. Alle Teiler von (x) sind nämlich von der Form (x, g (y)), wog (y) ein Polynom iny bedeutet; also hat auch das kleinste gemeinsame Vielfache von zweien diese Form, wird also ein echter Teiler von (x); (x 2,?x+y) besitzt nur deneinen Teiler (x, y), ist also notwendigerweise ebenfalls irreduzibel.

[11] Für die Eindeutigkeit der unter den irreduziblen Idealen enthaltenen ?isolierten? Ideale vgl. {\S} 7.

[12] Die Existenz der Zerlegung läßt sich auch direkt beweisen, in genauer Analogie mit der in {\S} 2 nachgewiesenen Existenz der Zerlegung in endlich viele irreduzible Ideale.

[13] Dieser Satz ist für Ideale aus Polynomen im Fall der Zerlegung in größte primäre schon ohne Beweis von Macaulay mitgeteilt; seine Definition der isolierten und nicht-isolierten (imbedded) primären Ideale kann als irrationale Fassung der unten mitgeteilten angesehen werden.

[14] Die Existenz der Zerlegung läßt sich wieder in Analogie zu {\S} 2 direkt beweisen; auch der Eindeutigkeitsbeweis läßt sich direkt führen (vgl. das in der Einleitung über Schmeidler und Noether-Schmeidler Gesagte). Der hier gegebene Beweis gibt zugleich Einblick in die Struktur der teilerfremd-irreduziblen Ideale.

[15] Es handelt sich also hier um eine ?rechtsseitige? Multiplikation, einen ?rechtsseitigen? BereichT und folglich um ?rechtsseitige? Moduln und Ideale. Würde man fürT eine linksseitige Multiplikation ?{\(\cdot\)}c zugrunde legen, so käme eine entsprechende Theorie der linksseitigen Moduln und Ideale;M enthält neben ? auch ?{\(\cdot\)}c. Das assoziative Gesetz wäre hier von der Form(?{\(\cdot\)}b){\(\cdot\)}a=?{\(\cdot\)}(b{\(\times\)}a).

[16] Die ganzen Zahlen sind wieder als abkürzende Zeichen, nicht als Ringelemente zu betrachten.

[17] Das einfachste Beispiel eines Moduls bildet der Modul aus ganzzahligen Linearformen; ? besteht hier aus allen ganzen rationalen Zahlen,T aus allen ganzzahligen Linearformen. Ein etwas allgemeinerer Modul entsteht, wenn man in ? undT ganze algebraische Zahlen statt der ganzrationalen Zahlen nimmt, oder etwa alle geraden Zahlen. Betrachtet man statt der Linearformen jeweils den Komplex aller Koeffizienten alsein Element, so sind die Verknüpfungen in ? undT tatsächlich verschiedene. Ideale in nicht-kommutativen Ringbereichen aus Polynomen bilden den Gegenstand der gemeinsamen Arbeit Noether-Schmeidler. Von Idealen in weiteren speziellen nichtkommutativen Bereichen handeln die Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen von Hurwitz (Berlin, Springer 1919) und die dort zitierten Arbeiten von Du Pasquier.

[18] Für spezielle, ?vollständig reduzible? Ideale lassen sich auch hier Eindeutigkeitssätze aufstellen; vgl. gemeinsame Arbeit Noether-Schmeidler.

[19] Über die vollen Invariantensysteme. Math. Ann.42 (1893), {\S} 3, S. 313. · Zbl 25.0173.01

[20] Diese Eigenschaft eines primären Ideals, ein irreduzibles Gebilde zu besitzen, nimmt Macaulay (vgl. Einleitung) zur Definition, während Lasker nur den Begriff der Mannigfaltigkeit eines Gebildes in die Definition aufnimmt, im übrigen abstrakt definiert. Die nur fürx 1=0 ...x n =0 verschwindenden primären Ideale nehmen bei Lasker eine Sonderstellung ein.

[21] Vgl. etwa J. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen (Leipzig, Teubner, 1903), S. 235.

[22] Ist umgekehrt für einen Polynombereich die Endlichkeitsbedingung erfüllt, und läßt jedes Polynom mindestens eine Darstellung zu, wo die Multiplikatoren von geringerem Grad inx sind, so ist der Bereich ein endlicher Integritätsbereich.

[23] Die Idealtheorie dieser Bereiche bildet den Gegenstand der Arbeiten von Du Pasquier: Zahlentheorie der Tettarionen, Dissertation Zürich, Vierteljahrsschr. d. Naturf. Ges. Zürich,51 (1906). Zur Theorie der Tettarionenideale, ibid?52 (1907). Der Inhalt der zweiten Arbeit ist der Nachweis, daß jedes Ideal ein Hauptideal wird.

[24] Den Basiselementen der einseitigen Ideale entsprechen Rechts- bzw. Linksklassen.

[25] In der Arbeit: Zur Theorie der Moduln, Math. Ann.52 (1899), S. 1 definiert E. Steinitz das kleinste gemeinsame Vielfache (den größten gemeinsamen Teiler) von Klassen durch kleinste gemeinsame Vielfache und größte gemeinsame Teiler der Elementarsysteme. Unabhängig davon findet sich das kleinste gemeinsame Vielfache von Klassen als ?Kongruenzkomposition? bei H. Brandt, Komposition der binären quadratischen Formen relativ einer Grundform, J. f. M.150 (1919), S. 1.

