von Koch, H.

On a class of equations connected with Euler-Maclaurin's sum formula. (English)

JFM 48.0478.03
Ark. för Mat., Astron. och Fys. 15, No. 26, 16 p. (1921).

Es handelt sich um die Summengleichung mit konstanten Koeffizienten

$$x_m + c_1 x_{m+1} + c_2 x_{m+2} + \cdots = u_m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dabei wird vorausgesetzt:

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|c_m|} < \frac{1}{r}, \quad \varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|u_m|} \leqq r,$$

und gesucht sind solche Lösungen x_n, für die auch

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|x_m|} \leqq r.$$

Hiernach sind die Reihen

$$F(t) = 1 + c_1 t + c_2 t + \cdots, \quad U\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{u_1}{t} + \frac{u_2}{t} + \cdots,$$
$$G\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{x_1}{t} + \frac{x_2}{t} + \cdots$$

in einem Kreisring $r < |t| < r + \varepsilon$ konvergent, und vermöge der Summengleichung besteht daselbst die Identität

$$F(t) G\left(\frac{1}{t}\right) = U\left(\frac{1}{t}\right) + \mathfrak{P}(t),$$

wo $\mathfrak{P}(t)$ eine Potenzreihe. Wenn ε klein genug, hat $F(t)$ keine Nullstelle in dem Kreisring, und daher läßt sich $U\left(\frac{1}{t}\right) : F(t)$ in eine Laurentsche Reihe entwickeln:

$$\frac{U\left(\frac{1}{t}\right)}{F(t)} = \frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t^2} + \cdots + \mathfrak{P}_1(t).$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt leicht, wenn $F(t)$ im Kreis $|t| \leqq r$ die Nullsteilen $t_1, t_2 \ldots, t_\nu$ hat:

$$\frac{x_1}{t} + \frac{x_2}{t^2} + \cdots \equiv G\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{h_1}{t} + \frac{h_2}{t^2} + \cdots + \frac{P_{\nu-1}(t)}{(t - t_1) \ldots (t - t_\nu)},$$

wo $P_{\nu-1}(t)$ ein Polynom von höchstens $(\nu - 1)$-tem Grad ist. Entwickelt man den letzten Bruch nach fallenden Potenzen: $\frac{p_1}{t} + \frac{p_2}{t^2} + \cdots$, so hängt p_m linear von ν willkürlichen Konstanten (den Koeffizienten des Polynoms $P_{\nu-1}$) ab, und die allgemeine Lösung der Summengleichung ist $x_\lambda = h_\lambda + p_\lambda$. Speziell wenn $F(t)$ gar keine Nullstelle im Kreis $|t| \leqq r$ hat, wenn also $\nu = 0$ ist, gibt es nur die eine Lösung $x_\lambda = h_\lambda$.

Wählt man beispielsweise

$$c_\lambda = \frac{h^\lambda}{(\lambda + 1)!}, \quad x_\lambda = h f^{(\lambda)}(z),$$

also

$$u_\lambda = f^{(\lambda-1)}(z + h) - f^{(\lambda-1)}(z) = \Delta f^{(\lambda-1)}(z)$$

und nimmt man $r < \frac{2\pi}{|h|}$ an, so entsteht aus $x_1 = h_1$ die Euler-Maclaurinsche Summenformel

$$h f'(z) = \Delta f(z) - \frac{h}{2} \Delta f'(z) + \frac{B_1}{2!} h^2 \Delta f''(z) - \cdots.$$

(IV 11.)

Reviewer: Perron, O., Prof. (München)