zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

Rademacher, H.

Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. (German) JFM 48.0485.05

Math. Ann. 87, 112-138 (1922).

In Verschärfung eines bekannten Satzes von Weyl wird gezeigt: Bilden die $\varphi_\nu(x)$ ein normiertes Orthogonalsystem des Intervalles $(0,1)$ und ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2$ konvergent, bestimmt man ferner eine monoton wachsende Folge positiver Zahlen $\lambda(\nu)$ so, daß auch noch $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \lambda(\nu) c_\nu^2$ konvergiert (was auf unendlich viele Arten möglich ist) und versteht man unter Λ_ϱ das kleinste $\lambda(\nu)$, für das $\lambda(\nu) \geqq \varrho$, so stellt $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sum\limits_{\nu=1}^{\Lambda_n} c_\nu \varphi_\nu(x)$ überall in $(0,1)$, abgesehen von einer Nullmenge, eine endliche Funktion dar. Daraus kann in bekannter Weise der Riesz-Fischersche Satz gewonnen werden. – Ist $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (c_\nu \log \nu)^2$ konvergent, so konvergiert $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x)$ überall, abgesehen von einer Nullmenge (bisher war dies – nach Plancherel – nur bekannt, wenn $\sum c_\nu^2 (\log \nu)^3$ konvergiert). Ist $\sum c_\nu^2$ konvergent, so ist überall, abgesehen von einer Nullmenge: $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x) = o(\log n)$. Ferner gelten (abgesehen von einer Nullmenge) die Abschätzungen: $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) = O(n^{\frac12} (\log n)^{\frac32+\varepsilon})$, $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi_\nu(x) = O(\log n)(\sum\limits_{\mu=1}^{n} a_\mu^2)^{\frac12+\varepsilon})$. Alle diese Abschätzungen gelten "wesentlich gleichmäßig". Alle diese Resultate gelten auch, wenn die $\varphi_\nu(x)$ nicht ein normiertes Orthogonalsystem des Intervalles (a,b) bilden, wenn nur der Ausdruck $\int\limits_a^b (\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} z_\nu \varphi_\nu(x))^2\,dx$ eine beschränkte quadratische Form der z_ν ist (denn dann können die $\varphi_\nu(x)$ so auf ein größeres Intervall ausgedehnt werden, daß sie in diesem größeren Intervall ein normiertes Orthogonalsystem bilden).– Seien die $\varphi_\nu(x)$ wieder ein normiertes Orthogonalsystem in $(0,1)$. Die Ausdrücke $\varrho_\nu(x) = \int\limits_0^1 \big| \sum\limits_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)\varphi_\nu(y) \big|\, dy$ werden als die zugehörigen "Lebesgueschen Funktionen" bezeichnet (im Falle des trigonometrischen Orthogonalsystems reduzieren sie sich auf Konstante und sind dort als "Lebesguesche Konstante" bekannt). Abgesehen von einer Nullmenge gilt die Abschätzung $\varrho_\nu(x) = O\big((\log n)^{\frac32+\varepsilon} n^{\frac12}\big)$, die sich, falls die $\varrho_\nu(x)$ Konstante sind, zu $\varrho_\nu = O(n^{\frac12})$ verschärft. – Es wird folgendes normierte Orthogonalsystem von $(0,1)$ näher studiert: $\psi(x) = 2e_\nu(x) - 1$, wo $e_\nu(x)$ die ν-te Stelle der Dezimalbruchentwicklung von x. Hier kann die Abschätzung $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \psi_\nu(x) = O(n^{\frac12})$ nur in einer Nullmenge gelten; es kann also in der oben gegebenen Abschätzungsformel für $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x)$ die rechte Seite nicht zu $O(n^{\frac12})$ verschärft werden. Die Lebesgueschen Funktionen werden hier Konstante ϱ_n, die asymptotisch gleich $\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ sind, so daß die oben gegebene Abschätzung $\varrho_n = O(n^{\frac12})$ nicht verschärft werden kann. Ist $\sum c_\nu^2$ konvergent, so konvergiert $\sum c_\nu \psi_\nu(x)$ überall, abgesehen von einer Nullmenge.

Reviewer: Hahn, Prof. (Wien)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orhogonalfunktionen fortschreiten, Math. Ann.67 (1909), S. 225-245, insbes. S. 243-245. · Zbl 40.0310.04

[2] F. Jerosch und H. Weyl, Über die Konvergenz von Reihen, die nach periodischen Funktionen fortschreiten, Math. Ann.66 (1909), S. 67-80; vgl. auch die unter 1) zitierte Arbeit von Weyl, S. 229 oben. · Zbl 39.0320.04 · doi:10.1007/BF01450911

[3] A. a. O. Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, Math. Ann.67 (1909), S. 226 ff. · Zbl 40.0310.04

[4] On the convergence of series of orthogonal functions. Proc. of the London Math. Soc. (2)12 (1913), S. 297-308. · Zbl 44.0303.04

[5] Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris157 (1913), S. 539-542. · Zbl 44.0304.01

[6] Proc. of the London Math. Soc. (2)14, S. 428-439, insbes. S. 429.

[7] Math. Ann.84 (1921) [S. 117-136], S. 131.

[8] A. a. O. Math. Ann.84 (1921) [S. 117-136], S. 131.

[9] Das Maß einer MengeE wird durchmE bezeichnet.

[10] A. a. O. Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten, Math. Ann.67 (1909), S. 226-227. · Zbl 40.0310.04

[11] Sur les suites de fonctions measurables, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris152 (1911), S. 244.

[12] Quelques remerques sur la détermination des valeurs moyennes, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris103 (1886), S. 980-987. Vgl. auch Rademacher, Über die asymptotische Verteilung gewisser konvergenzerzeugender Faktoren, Math. Zeitsehr.11, S. 276-288.

[13] A. a. O. On the summability of Fourier's series, Proc. of the London Math. Soc. (2)12 (1913), S. 369, Theorem 2.

[14] Über Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen, Math. Ann.35 (1890), S. 297-394, insbesondere S. 329.

[15] A. a. O. Über Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen, Math. Ann.35 (1890), S. 333.

[16] Über endliche Gruppen und Hermitesche Formen, Math. Zeitschr.1 (1918), S. 183-207, Satz VII. · Zbl 46.0174.03

[17] Leçons sur les séries trigonométriques [Paris, 1906], S. 86-87.

[18] Some Problems of Diophantine Approximation, Acta Mathem.37 (1914), S. 155-239, insbesondere S. 187, Theorem 1.47, und S. 189, Theorem 1. 471.

[19] A. a. O. Some Problems of Diophantine Approximation, Acta Mathem.37 (1914), S. 155-239, insbesondere S. 187, Theorem 1. 45, S. 185. · Zbl 45.0305.03

[20] A. a. O. Sur les suites de fonctions mesurables, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris152 (1911), S. 244. · Zbl 42.0423.01