Hilb, E.
Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen. (German) JFM 48.0529.02
Math. Zeitschr. 14, 211-229 (1922).

Verf. stellt sich die Aufgabe, eine Losung der linearen Differenzengleichung

$$(ax+b)f(x+1)+(cx+d)f(x)=g(x)$$

durch gewisse Grenzbedingungen eindeutig festzulegen; er behandelt vier verschiedene Arten von Grenzbedingungen.

I. Setzt man voraus, daß

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|g(x+n)|}<\left|\frac{c}{a}\right|$$

ist und stellt die Grenzbedingung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f(x+n)|}<\left|\frac{c}{a}\right|,$$

so ist dadurch eine Lösung eindeutig festgelegt, und zwar läßt sie sich durch die Reihe darstellen:

$$f(x)=\frac{g(x)}{cx+d}-\frac{ax+b}{cx+d}\,\frac{g(x+1)}{cx+c+d}+ \\ +\frac{ax+b}{cx+d}\,\frac{ax+a+b}{cx+c+d}\,\frac{g(x+2)}{cx+2c+d}-+\cdots,$$

was übrigens ganz unmittelbar einzusehen ist.

II. Ist k eine Konstante, so setze man

$$f(x+1)-kf(x)=\varDelta_k f(x)=\varDelta_k^1 f(x),\quad \varDelta_k\varDelta_k^{n-1}f(x)=\varDelta_k^n f(x).$$

Ist dann q_2 eine Zahl, die zwischen den als verschieden vorausgesetzten absoluten Beträgen von k und $k+\frac{c}{a}$ liegt, und wird

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\varDelta_k^n g(x)|}<q_2$$

vorausgesetzt, so gibt es eine und nur eine Lösung, für die auch

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\varDelta_k^n f(x)|}<q_2$$

ist. Sie läßt sich in Form einer Reihe darstellen:

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi_{0\nu}(x)\varDelta_k^\nu g(x).$$

III. Wenn man $f(x+1)$ in die Taylorsche Reihe $\sum\frac{1}{\nu!}f^{(\nu)}(x)$ entwickelt, geht die Differenzengleichung über in eine Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung. Dann ergibt sich der Satz: Sind v_1 und v_2 die zwei absolut kleinsten Werte des Logarithmus von $\frac{-c}{a}$ und ist q_3 eine Zahl im Intervall $|v_1|<q_3<|v_2|$, so gibt es unter der Voraussetzung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|g^{(n)}(x)|}<q_3,$$

wenn $\frac{ad-bc}{ca}$ keine positive ganze Zahl ist, eine und nur eine Lösung $f(x)$, für welche

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f^{(n)}(x)|}<q_3,$$

ist. Sie läßt sich in Form einer Reihe darstellen:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_{0\nu}(x) g^{(\nu)}(x).$$

Diese drei Sätze werden im wesentlichen dadurch bewiesen, daß die Differenzengleichung auf ein System von linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten und zwar

im Fall I mit den Unbekannten $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x+2)$, ...

im Fall II mit den Unbekannten $f(x)$, $\Delta_k f(x)$, $\Delta_k^2 f(x)$, ...

im Fall III mit den Unbekannten $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ...

zurückgeführt wird.

IV. Dagegen beruht der vierte Ansatz auf einem anderen Prinzip und zwar in der Hauptsache auf Residuenrechnung. Setzt man voraus, daß $g(x)$ für genügend große Werte von $\Re(x)$ die Form $\frac{\lambda}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ hat, und stellt man die Grenzbedingung, daß $f(x)$ ebenfalls von dieser Form ist, so gibt es wieder eine und nur eine derartige Lösung, und zwar läßt sie sich durch das Integral

$$f(x) = \int_0^{\infty} e^{-ux} F(u)\, du$$

darstellen. Dabei ist $F(u)$ die für $u = 0$ verschwindende Lösung der linearen Differentialgleichung:

$$(ae^{-u} + c)F'(u) + [(b-a)e^{-u} + d]F(u) = \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{uz} g(z)\, dz.$$

Reviewer: Perron, O., Prof. (München)

Full Text: DOI EuDML Link

References:

[1] N. E. Nörlund, Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies. Bull. Soc. math. (2)44 (1920)

[2] Der Nachweis dieses Hilfssatzes bildet den wesentlichen Inhalt des Kapitel I meiner Arbeit, Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationalen Koeffizienten. (1. Mitteilung.) Math. Ann.82 (1920), S. 1?39.

[3] Vgl. 1. c. Math. Ann.82, Kap. I.

[4] Vgl. zu diesem Paragraph E. Hilb, Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen, erscheint in Math. Ann.

[5] Vgl. Hilb, 1. c. Math. Ann.82, S. 11.

[6] Vgl. hierzu E. Hilb, l. c. 4).

[7] Die notwendigen Grundlagen liefern hierfür E. Hilb, Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung. 2. Mitteilung Math. Ann.84, S. 16?30; 3. Mitteilung ebenda, S. 33?52. O. Perron, ebenda, S. 31?42. H. v. Koch, Sur les équations différentielles linéaires d'ordre infini. Arkiv för Mat.15 (1921).