Morse, H. M.

Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. (English) JFM 48.0786.06

American M. S. Trans. 22, 84-100 (1921).

Der Verf. führt die von Hadamard begonnene Theorie der geodätischen Linien auf Flächen negativer Krümmung weiter. Die in Betracht gezogenen Flächen liegen mit Ausnahme endlich vieler Flächenstücke vom topologischen Typus des Halbzylinders ganz im Endlichen. Diese Halbzylinder können nach Hadamard von der Fläche durch geschlossene geodätische Linien abgetrennt werden. Diese geodätischen Linien seien $g_1, \dots, g_\nu$. Das durch sie bestimmte endliche Flächenstück sei S. Dieses wird durch endlich viele Querschnitte, die von einem Punkt P von g_ν ausgehen und der Reihe nach, ohne sich nochmals zu treffen, auf $g_1, \dots, g_{\nu-1}$ enden, in ein einfach berandetes Flächenstück verwandelt. Diese Querschnitte seien $h_1, \dots, h_\nu$. Alsdann wird durch $2p$ von P ausgehende Rückkehrschnitte, die sich sonst weder einander, noch die g_k noch die h_k treffen, ein einfachzusammenhängendes Flächenstück hergestellt. Alsdann denke man sich unendlich viele Exemplare T_k dieses einfachzusammenhängenden Flächenstückes, die man in üblicher Weise zur Überlagerungsfläche vereinigt. Auf dieser gleichfalls negativ gekrümmten Fläche S studiert nun der Verf. die geodätischen Linien unter Verwendung der von Hadamard angegebenen Sätze. Es werden nur die geodätischen Linien betrachtet, die S nie verlassen.

Die Hadamardschen Sätze führen zu der Erkenntnis, daß man als Querschnitte und Rückkehrschnitte geodätische Linien nehmen kann. Man betrachtet dann irgendeine lineare Reihe von Exemplaren der so einfachzusammenhängend gemachten Fläche S, d. h. eine unendliche Folge von der Art, daß zwei aufeinanderfolgende Glieder der Reihe längs genau einer Randlinie des einfachzusammenhängenden Bereiches zusammenhängen. Dann zeigt der Verf., daß es in jeder solchen Reihe genau eine geodätische Linie gibt, und daß jede geodätische Linie der Überlagerungsfläche in eine solche lineare Kette eingebettet werden kann. Es gibt auf S genau eine geodätische Linie, welche zwei gegebene Punkte verbindet. Keine geodätische Linie besitzt Selbstüberkreuzungen. Auf der ursprünglichen Fläche erhält man geschlossene geodätische Linien aus den geodätischen Linien der Überlagerungsfläche, deren zugeordnete lineare Reihen von Exemplaren der einfachzusammenhängenden Fläche periodisch ist. Verschiedene geodätische Linien der Überlagerungsfläche, d. h. geodätische Linien, welche verschiedenen linearen Reihen angehören, können miteinander nicht durch geodätische Linien verbunden werden, welche gleichfalls der betrachteten Menge der geodätischen Linien angehören, die in ihrem Gesamtverlauf dem endlichen Flächenstück angehören.

In der zweiten Arbeit wird gezeigt, daß als Kennzeichen für geschlossene geodätische Linien schon die Periodizität der Folge der $g_1, \dots, g_{\nu-1}$ und der Rückkehrschnitte, aus denen im topologischen Sinne die geodätische Linie aufgebaut ist, genügt.

Eine geodätische Linie g wird Grenze einer Folge von geodätischen Linien genannt, wenn eine Folge von Linienelementen auf diesen geodätischen Linien gegen ein Element der Grenzkurve konvergiert und wenn zugleich die Schnittpunkte der Kurven der Folge und der Grenzkurve sich nicht in diesem Grenzelement häufen. Es gibt dann auf einer Fläche negativer Krümmung, für die $2p + \nu - 1 \geqq 2$ ist, mindestens eine geodätische Linie, welche jede andere ganz auf S liegende geodätische Linie zur Grenze hat.

Nach Birkhoff versteht man unter einer Minimalfolge von geodätischen Linien eine Folge, welche jedes Element der Folge und keine andere geodätische Linie als Grenze hat. Jede Linie einer solchen Folge heißt rekurrent.

Z. B. ist jede geschlossene geodätische Linie rekurrent und die Minimalfolge, der sie angehört, besteht aus ihr allein. Aber der Verf., zeigt, daß es noch andere rekurrente Linien gibt. Die Menge dieser rekurrenten Linien hat die Mächtigkeit des Kontinuums. Diese rekurrenten Linien haben jede ganz auf S verlaufende geodätische Linie zur Grenze. (VI 3.)

Reviewer: Bieberbach, Prof. (Berlin)

Full Text: DOI