Takagi, T.

Über eine Theorie des relativ Abelschen Zahlkörpers. (English) JFM 47.0147.03

Journ. Coll. of Science Tôkyo 41, Artikel Nr. 9, 133 S. (1920).

Die bisherigen Untersuchungen über relativ-Abelsche Körper nahmen ihren Ausgang von den Kummerschen Arbeiten zur Theorie der Reziprozitätsgesetze; unter dem Einfluß von Hilberts großartigen Konzeptionen auf diesem Gebiet hat sich die Theorie dann zunächst fast ausschließlich mit den relativ-Abelschen Körpern vom Primzahlrelativgrad beschäftigt und dabei vor allem die Herleitung des Reziprozitätsgesetzes für l-te Potenzreste als ursprünglich erstes Ziel ins Auge gefaßt. Der Aufbau dieser Theorie und die Erreichung dieses Zieles ist das Verdienst von Furtwängler. Parallel dazu entwickelte sich von der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen ausgehend, seit Kronecker vor allem durch die Arbeit von H. Weber eine andere Theorie, welche jedoch nur für den rationalen oder imaginär-quadratischen Grundkörper (also die einzigen Körper mit nur endlich vielen Einheiten) ausgebildet wurde, hier aber die allgemeinsten relativ-Abelschen Körper betrachtete und die Erledigung der Reziprozitätsgesetze ganz bei Seite ließ. Die abschließenden Arbeiten in dieser Richtung stammen von Fueter.

In der vorliegenden Arbeit von Takagi wird nun die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper in der größten Allgemeinheit in Angriff genommen und, bis zur Gewinnung eines vollständigen Überblickes über diese Körper, auch durchgeführt. Die Methoden gehören beiden oben bezeichneten Gedankenkreisen an; charakteristisch ist für Takagi die, wie die Arbeit zeigt, höchst zweckmäßige Wahl seines Ausgangspunktes, die Definition der Klassenkörper.

Der Hilbertsche Klassenkörper eines Grundkörpers k ist bekanntlich ein Relativkörper von k mit den besonderen Merkmalen: 1. Seine Relativgruppe ist isomorph mit der Gruppe der Idealklassen in k. 2. Primideale in k, welche derselben Idealklasse angehören, zerfallen im Oberkörper in derselben Art. 3. Die Relativdiskriminante ist gleich 1. Eine naheliegende Verallgemeinerung, welche auch z. B. in der Theorie der komplexen Multiplikation zur Anwendung gekommen ist, ergibt sich so, daß man statt der gewöhnlichen Idealklasseneinteilung eine Einteilung der Ideale in "Klassen mod. $\mathfrak{f}$" zugrunde legt, wobei $\mathfrak{f}$ irgend ein ganzes Ideal aus k ist. Die "feinste" Einteilung mod. $\mathfrak{f}$ ist die: Zwei ganze, zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideale $\mathfrak{a}, b$ gehören zu derselben Klasse mod. $\mathfrak{f}$, wenn es zwei ganze Zahlen α, β in k gibt, so daß $\alpha\mathfrak{a} = \beta\mathfrak{b}, \alpha \equiv \beta 1(\text{mod.}\mathfrak{f})$, überdies $\alpha\beta$ total positiv ist. Diese Klassen lassen sich leicht zu einer Abelschen Gruppe vereinigen. Jede Untergruppe dieser Gruppe bestimmt vermittels der zugehörigen Faktorgruppe eine andere Einteilung der Ideale mod. $\mathfrak{f}$. Definiert man nun unter Benutzung eines solchen Klassenbegriffes mod. $\mathfrak{f}$ allein durch die Forderungen 2. einen Klassenkörper zu dieser Klasseneinteilung, so ist das Hauptresultat der Theorie von Takagi der folgende schöne abschließende Satz: Jeder relativ-Abelsche Körper ist ein Klassenkörper zu einer gewissen Klasseneinteilung im Grundkörper k und umgekehrt.

Takagi geht in seiner Theorie aber von einer anderen Definition aus: Es sei in dem Grundkörper k ein Ideal $\mathfrak{f}$ als Modul und die eben erwähnte feinste Klasseneinteilung mod. $\mathfrak{f}$ gegeben. Die Menge dieser Klassen, welche ja eine Abelsche Gruppe bilden, sei $\mathfrak{G}$. Ferner sei irgend ein relativ-Galoisscher (also nicht notwendig relativ-Abelscher) Körper K gegeben. Aus der Menge $\mathfrak{G}$ wähle man nun diejenigen Klassen aus, welche Relativnormen von Idealen von K enthalten; sie bilden eine Teilmenge $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{G}$ die offenbar eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Wenn nun der Index von $\mathfrak{H}$ innerhalb $\mathfrak{G}$, d. h. der Grad der Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ gleich dem Relativgrad von K ist, denn heißt K Klassenkörper für diese Klassengruppe $\mathfrak{H}$. (Die Bezeichnung scheint mir nicht ganz glücklich zu sein, da es nicht allein auf $\mathfrak{H}$ als abstrakte Gruppe ankommt, sondern auch auf die Bedeutung der Elemente von $\mathfrak{H}$ als Klassen wohlbestimmter Ideale; auch ist der Modul $\mathfrak{f}$ und damit sogar die abstrakte Gruppe $\mathfrak{H}$ durch K nicht etwa eindeutig bestimmt.) Der Sinn dieser Definition ist der: Es soll möglich sein, zu dem Körper K eine solche Idealklasseneinteilung im Grundkörper durch Kongruenten mod. $\mathfrak{f}$ zu definieren, daß der Grad der so entstehenden Klassengruppe (d. i. $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$) gleich dem Relativgrad ist und daß alle Primideale von k, welche in lauter Faktoren vom Relativgrad 1 in K zerfallen, der Hauptklasse angehören.

Im einleitenden 1. Kap. werden diese allgemeinen Begriffe erörtert, insbesondere aus der asymptotischen Verteilung der Primideale der Eindeutigkeitssatz abgeleitet, wonach zu einer Klassengruppe nicht zwei verschiedene Klassenkörper gehören können. – Das 2. Kap. enthält die allgemeine Theorie des relativ-Abelschen Körpers vom Primzahlgrade l, in einer von Hilbert-Furtwängler etwas abweichenden Form.

Takagi operiert ohne Normenrestsymbol und definiert die Geschlechter im Oberkörper durch Kongruenzen mit Hilfe der Normenreste in k, wie Weber und Fueter. Es zeigt sich, daß jeder dieser Körper ein Klassenkörper ist, als Modul der zugehörigen Klassengruppe kann man die $(l-1)$-te Wurzel aus der Relativdiskriminante wählen. – Im 3. Kap. wird der allgemeine Existenzbeweis des Klassenkörpers zu beliebig gegebener Klassengruppe $\mathfrak{H}$ erbracht, zunächst für den Fall, daß der Index von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ eine Primzahl l ist: Die Anzahl der nach dem Ergebnis des 2. Kap. vorhandenen Klassenkörper nach demselben Modul $\mathfrak{f}$ ergibt sich als nicht kleiner als die Anzahl der überhaupt existierenden Klassengruppen mod. $\mathfrak{f}$ mit der genannten Eigenschaft. Wegen des Eindeutigkeitssatzes gibt es daher zu jeder dieser Klassengruppen auch wirklich einen Klassenkörper. In bekannter Weise wird dann der allgemeine Fall erledigt und dabei gezeigt, daß jeder Klassenkörper relativ-Abelsch ist, seine Gruppe isomorph mit der Gruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ ist und endlich jeder Primfaktor der Relativdiskriminante in dem Modul $\mathfrak{f}$, er zur Definition von $\mathfrak{H}$ dient, aufgeht. – Das 4. Kap. endlich enthält die abschließenden allgemeinen Sätze, die nun sich ohne große Schwierigkeit ergeben, erstens den Vollständigkeitssatz: *Jeder relativ-Abwelsche Körper ist ein Klassenkörper.* Die Primideale des Grundkörpers, welche im Oberkörper in lauter Faktoren vom Relativgrade 1 zerfallen,. genügen also jedenfalls Kongruenzbedingungen. Zweitens wird darüber hinaus aber noch der Zerlegungssatz für alle Primideale des Grundkörpers bewiesen: Ist K Klassenkörper für die Klassengruppe $\mathfrak{H}$ und gehören zwei Primideale des Grundkörpers derselben durch $\mathfrak{H}$ bestimmten Nebengruppe innerhalb $\mathfrak{G}$ an, so zerfallen sie in K in derselben Art. Jene eben erwähnten Kongruenzbedingungen sind also auch umgekehrt charakteristisch für die vollständig zerfallenden Primideale. Die Zerlegung der Faktoren der Relativdiskriminante, welche ja durch die Klasseneinteilung nicht erfaßt werden, wird übrigens auch genau angegeben.

Die wichtigste Einsicht scheint mir aber der folgende, wohl schon vermutete, aber hier zum ersten Mal bewiesene Satz zu liefern: *Die Primideale von k, welche in einem relativ-Galoisschen, aber nicht relativ-Abelschen Körper in lauter Faktoren vom Relativgrad 1 zerfallen, lassen sich nicht durch Kongruenzbedingungen der bisherigen Art charakterisieren.*

Das letzte, 5. Kapitel bringt Anwendungen der Theorie auf die Klassenkörper der komplexen Multiplikation. Mit seinen allgemeinen Sätzen kann Takagi natürlich den durch Fueter schon bekannten Vollständigkeitssatz dieser Theorie sehr einfach beweisen.

Wie dieser Bericht zeigt, stellt die Arbeit einen sehr wesentlichen Fortschritt in unserer Kenntnis der relativ- Abelschen Körper dar und ist heute auch ohne Zweifel die beste und übersichtlichste Darstellung schon bekannter Resultate.

Reviewer: Hecke, Prof. (Hamburg)